КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО КУРСУ

"СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ"

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов - есть наука о расчете элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Основными задачами сопротивления материалов являются:

1) выбор расчетной схемы конструкции;

2) по внешним нагрузкам, действующим на конструкцию, определяются внутренние усилия;

3) по внутренним усилиям подбираются поперечные размеры элемента конструкции или, наоборот, проверяют прочность заданных размеров элементов конструкции.

§ 1. Основные понятия, определения и допущения

Сопротивление материалов в своих исследованиях использует законы и теоремы теоретической механики, и, в первую очередь, законы статики, а также экспериментальные данные, получаемые при испытаниях материала.

В то же время имеются отличия от теоретической механики:

1) теоретическая механика рассматривает абсолютно жесткие тела; сопротивление материалов - деформируемые тела;

2) в теоретической механике силу можно переносить по линии ее действия, чего нельзя сделать в сопротивлении материалов, т.к. перенос силы может изменить характер нагружения (см. рис. 1);

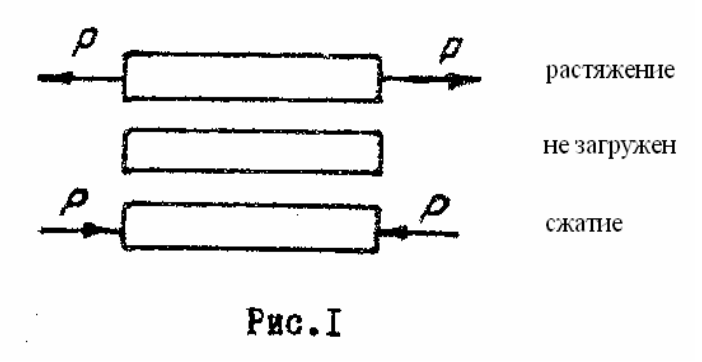


Рис.1

3) в теоретической механике систему параллельных сил можно заменить равнодействующей; в сопротивлении материалов этого сделать нельзя при определении прогибов (см. рис. 2а и 2б).

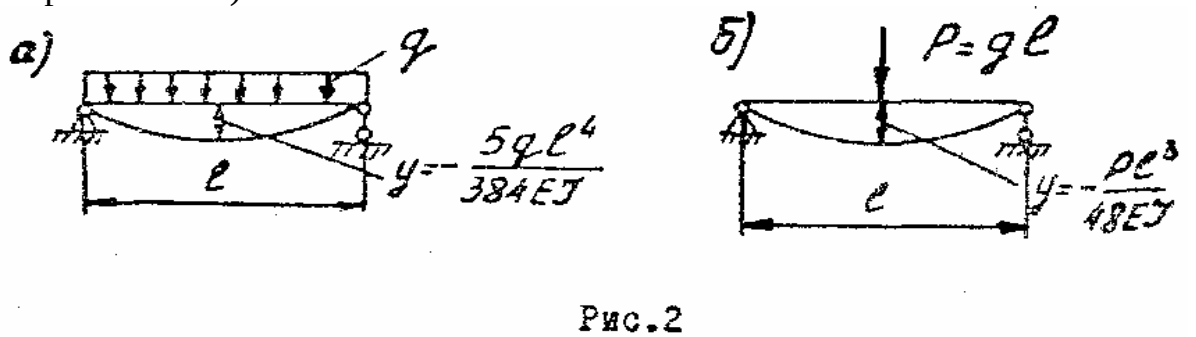


Рис.2

Каждый расчет начинается с выбора расчетной схемы. Выбор такой схемы заключается в схематизации рассматриваемого объекта путем отбрасывания несущественных факторов.

Все тела приводятся к схеме бруса, пластинки или оболочки. Брусом называют тело, одно из измерений которого много больше двух других. Брус

может иметь сечение постоянное или переменное вдоль оси. Брус, имеющий прямолинейную ось, называется стержнем. Стержень, работающий главным образом на изгиб, называется балкой, на кручение - валом.

Под пластинкой понимают тело, у которого одно из измерений (толщина) много меньше двух других. Искривленная пластинка в одном или двух направлениях называется оболочкой.

Внешние силы, по своему характеру приложения, подразделяются на поверхностные, действующие по поверхности тела, и объемные, действующие по всему объему тела.

Поверхностные силы делятся на сосредоточенные и распределенные. Сосредоточенные силы действуют на весьма малых площадях поверхности тела. Распределенная нагрузка приложена непрерывно на протяжении некоторой площади или длины тела. Величина распределенной нагрузки, приходящаяся на единицу площади или длины тела, называется интенсивностью нагрузки и обозначается q. При действии нагрузки на конструкцию возникает противодействие в виде реакций связей. Нагрузки вместе с реакциями составляют внешние силы. По характеру действия нагрузки бывают статические, которые прикладываются от нуля до определенного значения и затем не меняют своей величины, и динамические, действующие в очень короткие промежутки времени; когда в элементах конструкции возникают значительные ускорения.

Под действием внешних сил все твердые тела изменяют свою форму и размеры. Такое изменение называется деформацией.

Различают деформацию абсолютную и относительную. Деформация, характеризующая изменение линейных размеров тела, называется линейной, а деформация, связанная с изменением формы, называется угловой.

В сопротивлении материалов, в основном, рассматриваются упругие деформации, которые являются весьма малыми по сравнению с размерами тела.

Остановимся теперь на определении внутренних сил в любом сечении тела. Для определения внутренних сил в любом сечении тела служит метод сечений. Сущность этого метода заключается в следующем. (См. рис. 3).

Мысленно делается сечение в теле, в результате чего тело рассекается на две части. Отбрасываем одну из частей, например, левую. Для того чтобы оставшаяся (правая) часть находилась в равновесии, по всему сечению прикладываем силы, равные силам взаимодействия левой части на правую. Значения этих сил определяются из уравнений статики, составленных для правой части. Аналогичный результат получим, если отбросим правую часть и будем рассматривать левую. Силы в сечении, будучи внешними силами, для выделенной части, являются внутренними силами для целого тела.

Метод сечений дает возможность определить только сумму внутренних сил в каком-нибудь сечении. Согласно законам теоретической механики все силы в сечении можно привести к главному вектору $\overline{R}$ и главному моменту $\overline{M}$. Раскладывая $\overline{R}$ и $\overline{M}$ по координатным осям X, Y и Z с началом

координат в центре тяжести сечения, получим три составляющие главного вектора N_z, Q_x, Q_y и три составляющие главного момента M_x, M_y и M_z. Все шесть составляющих принято называть внутренними силовыми факторами. Каждый из шести силовых факторов имеет свое название.

N_z - носит название продольной силы; Q_x, Q_y - поперечные силы; M_x, M_y - изгибающие моменты; M_z - крутящий момент.

Иллюстрация метода сечений и приведение внутренних сил в сечении к главному вектору и главному моменту и их составляющие, приводится на рис.3б, 3в, 3г, 3д, 3е.

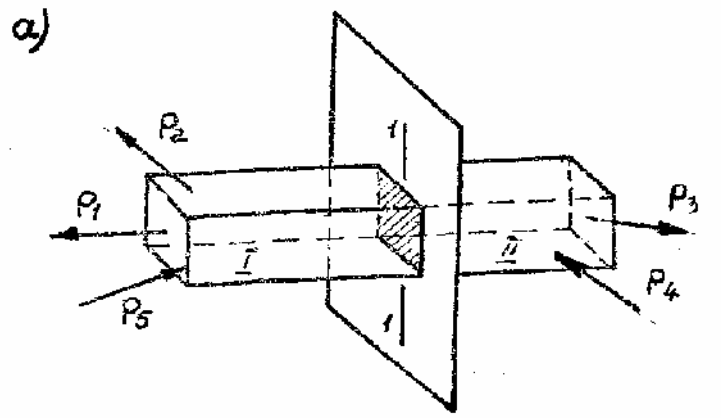


Рис.3а

Рассмотрим сечение некоторого тела, рис. 4а.

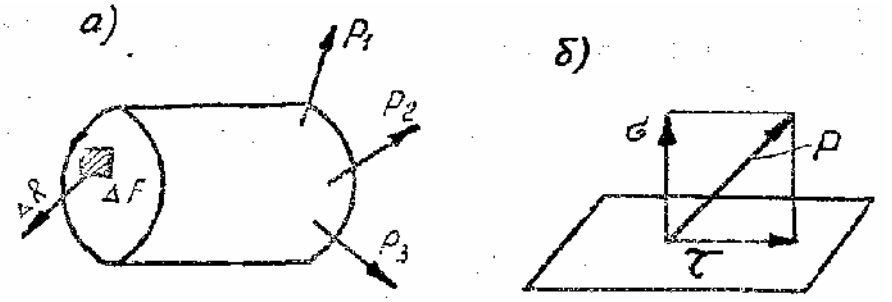


Рис.4

За среднее напряжение на элементарной площадке ΔF принимается отношение: $\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{cp}$, ΔR - внутренняя сила в пределах площадки ΔF.

В пределе получим: $\lim\limits_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = \frac{dR}{dF} = P$,

где P - полное напряжение в точке рассматриваемого сечения.

Векторная величина P - есть полное напряжение в точке.

Полное напряжение P может быть разложено на составляющие, рис. 4б.

Проекция вектора полного напряжения на нормаль называется нормальным напряжением и обозначается через σ, а составляющая, которая расположена в плоскости сечения, называется касательным напряжением и обозначается через τ.

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 2. Внутренние силы и напряжения

Под растяжением (сжатием) понимается такой вид деформации, когда при нагружении в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения.

Примером растяжения может служить брус, растягиваемый силами, приложенными к его концам.

Для определения внутренних сил и напряжения для примера рассмотрим стержень с постоянной площадью поперечного сечения F $см^2$, который подвергается растяжению силами P, рис. 5. При этом предполагается, что плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются и после деформации плоскими и нормальными к его оси. Эта гипотеза называется гипотезой плоских селений. Внутренние силы и напряжения в любом сечении бруса определяются с помощью метода сечений.

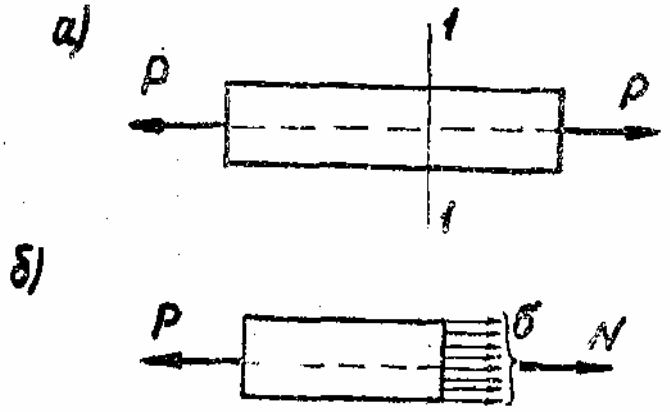


Рис.5

Плоскостью, перпендикулярной к оси бруса мысленно разрежем его по данному сечению и отбросим одну из полученных двух частей, например, правую. Для обеспечения равновесия оставшейся части приложим по всему сечению в каждой его точке внутренние силы, которые должны заменить действие отброшенной части на оставшуюся часть бруса.

Равнодействующая внутренних сил N легко определяется из условия равновесия с помощью уравнения статики: $\sum X = N - P = 0$, откуда N=P.

Если считать, что внутренние силы равномерно распределены по сечению, то нормальные напряжения во всех точках сечения будут одинаковыми и могут быть определены по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}, \qquad (2.1)$$

где F – площадь поперечного сечения.

§ 3. Продольные и поперечные деформации. Коэффициент Пуассона. Закон Гука.

При действии растягивающих сил по оси бруса длина его увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. При действии сжимающих усилий про-

исходит обратное явление. На рис. 6 показан брус, растягиваемый двумя силами P. В результате растяжения брус удлинился на величину Δl, которая называется абсолютным удлинением, и получим абсолютное поперечное сужение Δa.

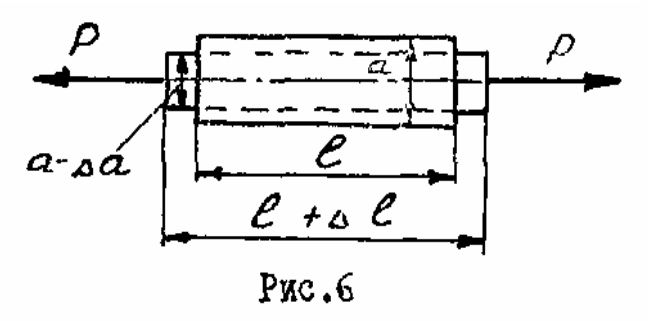


Рис.6

Отношение величины абсолютного удлинения и укорочения к первоначальной длине или ширине бруса называется относительной деформацией. В данном случае относительная деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ называется продольной деформацией, а $\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}$ - относительной поперечной деформацией. Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

Коэффициент Пуассона для каждого материала как упругая константа определяется опытным путем и находится в пределах: $\mu = 0 \div 0,5$; для стали $\mu = 0,3$.

В пределах упругих деформаций установлено, что нормальное напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации. Эта зависимость называется законом Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \ , \quad (3.2)$$

где E - коэффициент пропорциональности, называемый модулем нормальной упругости.

Если мы в формулу закона Гука подставим выражение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{P}{F}$, то получим формулу для определения удлинения или укорочения при растяжении и сжатии:

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F} \ , \quad (3.3)$$

где произведение EF называется жесткостью при растяжении, сжатии.

§ 4. Понятие о допускаемом напряжении. Коэффициент запаса прочности.

Выше указывалось, что для обеспечения надежной работы любого сооружения и его долговечности необходимо, чтобы каждая его составная часть (элемент конструкции) была прочной, т.е. чтобы она была гарантиро-

вана от разрушения за все время эксплуатации. Поэтому действительные напряжения во всех частях сооружения не должны превышать определенного предела для того или иного материала, а именно, они должны быть значительно меньше так называемых опасных (предельных) напряжений, которыми являются предел прочности $\sigma_в$ - для хрупких материалов и предел текучести $\sigma_т$ - для пластичных материалов.

Наибольшее напряжение, при котором обеспечивается длительная работа конструкции без риска ее разрушения называется допускаемым напряжением. Оно обозначается той же буквой, что и действительное напряжение, но заключенной в квадратные скобки [σ].

Таким образом, величина допускаемого нормального напряжения [σ] должна составлять некоторую часть от предела прочности $\sigma_в$ или предела текучести $\sigma_т$. Число, показывающее, во сколько раз допускаемое напряжение меньше предела прочности или предела текучести, называется коэффициентом запаса прочности и обозначается буквой *K*.

Следовательно, величина допускаемого напряжения для хрупких материалов может быть выражена формулой:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_в}{K} \qquad (4.1)$$

Для пластичных материалов, которые могут получать значительные остаточные деформации перед разрушением, за опасное напряжение принимается предел текучести $\sigma_т$. Так как величина предела текучести при растяжении и сжатии у пластичных материалов почти одна и та же, то и допускаемые напряжения для них при растяжении и сжатии часто назначаются одинаковыми, т.е.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{K} \qquad (4.2)$$

При выборе допускаемого напряжения, что является крайне ответственной задачей, необходимо учитывать многие факторы, влияющие на его величину. Очень важное значение имеет, например, род применяемого материала. Хрупкие материалы, почти не дающие остаточных деформаций, разрушаются внезапно, а поэтому коэффициент запаса прочности для них назначается больше, чем для пластичных материалов, имеющих площадку текучести.

Для пластичных материалов коэффициент запаса прочности *"K"* принимается равным 1,5 … 2,0, для хрупких – 3 … 4.

§ 5. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

Под расчетом элемента конструкции будем понимать совокупность действий, в результате которых можно получить ответ на вопрос, удовлетворяет ли конструкция или ее элемент требованиям надежности и долговечности, которые были сформулированы в самом начале изложения предмета. Напомним, что для достижения полной гарантии надежности и долго-

вечности сооружения необходимо, чтобы все его элементы были прочны, жестки и устойчивы.

Рассмотрим сначала вопрос расчета элемента конструкции на прочность при растяжении и сжатии:

Имеются два метода расчета на прочность;

1) метод расчета по допускаемым напряжениям,

2) метод расчета по предельным состояниям (допускаемым нагрузкам).

Первый метод (по допускаемым напряжениям) применяется для расчета элементов конструкций, в которых по условиям эксплуатации допустимы, как правило, лишь весьма малые упругие деформации, например, для деталей машин и механизмов.

Второй метод (по допускаемым нагрузкам) принят для расчета элементов конструкций гражданских и промышленных зданий, а также для расчета определенных инженерных сооружений и конструкций, изготовляемых из пластичных материалов.

Сущность метода расчета по допускаемым напряжениям сводится к требованию, чтобы действительное напряжение в точках любого поперечного сечения элемента конструкций не превышало допускаемого напряжения для данного материала. Поэтому условие прочности для растягиваемого или сжимаемого бруса можно выразить следующей расчетной формулой:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \qquad (5.1)$$

Полученная формула читается так: нормальное напряжение в каждой точке любого поперечного сечения бруса не должно превышать допускаемого напряжения материала.

Практические расчеты на растяжение и сжатие сводятся к определению одной из неизвестных величин, входящих в эту формулу по двум известным или легко определяемым из условий задач (величина [σ] обычно известна). Применение расчетной формулы позволяет решить три рода задач на растяжение, сжатие.

1. Даны размеры поперечного сечения стержня (или его площадь F) и величина продольной силы N (или имеются все данные для ее определения). Требуется определить величину наибольшего напряжения в сечении стержня. Для данного случая при решении задачи следует пользоваться формулой:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma] .$$

В результате решения может оказаться, что величина действительного напряжения в сечении σ превышает допускаемое напряжение [σ], тогда необходимо или увеличить площадь поперечного сечения, или, если это возможно, уменьшить нагрузку.

Разрешается превышение или понижение действительных напряжений по сравнению с допускаемым до ± *5%*.

2. Известна или может быть определена из условия задачи величина продольной силы N в сечении и допускаемое напряжение материала [σ]; требуется определить необходимую площадь F поперечного сечения стержня или, как говорят, подобрать его сечение. В этом случае задача решается по формуле:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} \qquad (5.2)$$

3. Даны размеры поперечного сечения, а также допускаемое напряжение материала; требуется определить значение наибольшей нагрузки на стержень.

Из формулы (5.1) получаем:

$$N = [\sigma] \cdot F \quad . \qquad (5.3)$$

СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

§ 6. Понятие о сдвиге (срезе)

Под сдвигом понимается угловая деформация, которая численно равна изменению величины первоначально прямого угла в радианах и обозначается γ.

Для демонстрации явления сдвига рассмотрим элементарный прямоугольник ABDC, рис.7.

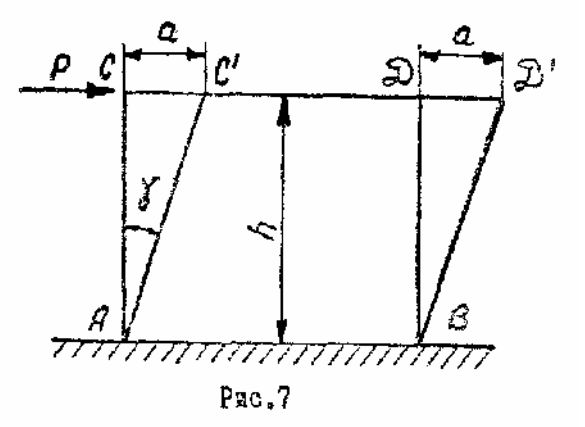


Рис.7

После деформации прямоугольник ABDC превращается в параллелограмм ABD/C/ Величина CC/=*a*, на которую сечение CD сдвинулось относительно соседнего сечения AB, называется абсолютным сдвигом.

Угол γ, на который изменился прямой угол параллелепипеда, называется относительным сдвигом и является мерой сдвига. В области упругих деформаций этот угол очень мал и может быть определен как:

$$\frac{CC'}{AC} = \frac{a}{h} = tg\,\gamma \approx \gamma$$

Здесь в силу малости угла тангенс его можно заменять самим углом. Из формулы видно, что относительный сдвиг - есть отношение абсолютного сдвига к расстоянию между рассматриваемыми сдвигаемыми сечениями.

Для определения внутренних сил в сечении стержня, между двумя срезывающими силами P применим метод сечений. Для этого отбросим одну часть тела относительно интересующего нас сечения, а действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренними силами, рис.8.

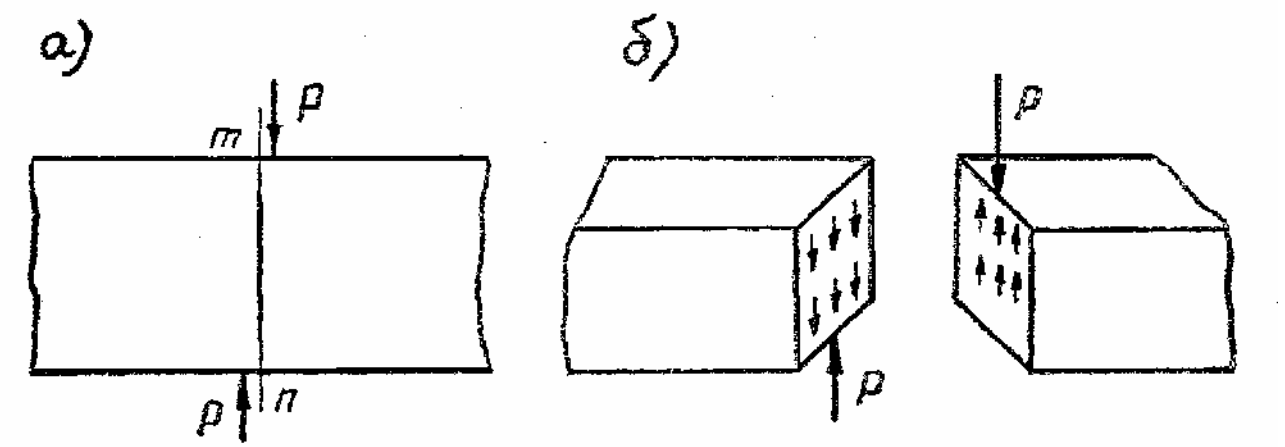


Рис.8

Согласно рис. 8б внутренние силы должны вызывать касательные напряжения, которые при условии равномерного их распределения по сечению можно определить:

$$\tau = \frac{P}{F}, \qquad (6.1)$$

где F - площадь поперечного сечения;

P - сдвигающая (срезывающая) сила.

Экспериментально подтвержден для случая сдвига закон Гука:

$$a = \frac{P \cdot h}{G \cdot F}$$

где $\frac{1}{G}$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от природы материала.

Зная, что $\frac{a}{h} = \gamma$ и $\frac{P}{F} = \tau$ можем перейти к следующему виду закона Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \qquad (6.2)$$

где G – есть модуль сдвига или модуль упругости второго рода.

Модуль сдвига обычно составляет некоторую часть от модуля нормальной упругости E:

$$G \cong 0,4 \cdot , \qquad (6.3)$$

а точная зависимость между упругими постоянными:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \qquad (6.4)$$

где μ - коэффициент Пуассона.

Модуль сдвига для стали $G = 8 \cdot 10^5$ кг/см^2.

Расчетное уравнение при сдвиге:

$$\tau = \frac{P}{F} \le [\tau], \qquad (6.5)$$

где $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором по двум взаимно-перпендикулярным площадкам действуют лишь касательные напряжения, а нормальные напряжения равны нулю.

§ 7. Кручение

Под кручением понимают такой вид деформации, когда в поперечных сечениях бруса возникают крутящие моменты.

Результаты опытов над кручением круглого бруса позволили принять следуют допущения при изучении теории кручения:

1) плоские поперечные сечения круглого бруса остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
2) радиусы, проведенные в поперечных сечениях, после деформации сохраняют свою длину;
3) углы поворота сечения тем больше, чем дальше сечение отстоит от мест закрепления;
4) образующие стержня превращаются в винтовые линии, т.е. происходит сдвиг частиц, и в поперечных сечениях возникают касательные напряжения;
5) принимается закон Гука, т.е. соблюдается пропорциональность между крутящим моментом и углом закручивания в пределах упругих деформаций.

Для определения касательных напряжений применим метод сечений. Мысленно вырежем из круглого бруса элемент радиусом r и длиной *dz* (рис.9а), из которого в свою очередь, вырежем другой элемент произвольного радиуса ρ (рис. 9б).

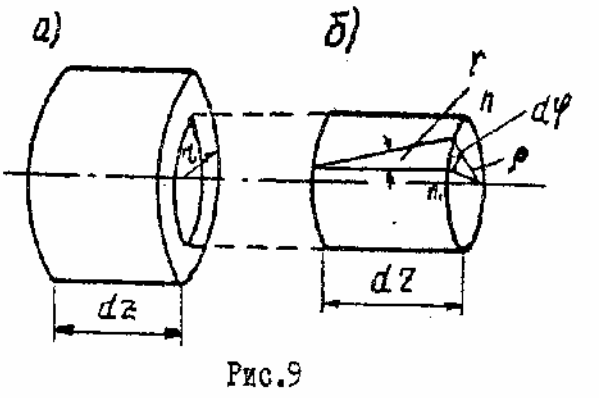


Рис.9

Положим, что разность полных сдвигов двух сечений на бесконечно малом расстоянии *dz* будет nn_1, тогда относительный сдвиг $\gamma = \frac{n n_1}{d z}$;

Если обозначить весьма малую разность полных углов закручивания на длине dz через dφ можно написать $n n_1 = \rho \cdot \varphi$.

Тогда выражение для относительного сдвига представится в виде:

$$\gamma = \frac{n n_1}{d z} = \rho \cdot \frac{d \varphi}{d z}$$

Используем закон Гука при сдвиге $\tau = G \cdot \gamma$. Подставив в эту формулу

выражение для относительного сдвига, получим пока еще не окончательную формулу касательного напряжения в произвольной точке рассматриваемого сечения:

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d \varphi}{d z}, \qquad (7.1)$$

где ρ - расстояние от этой точки до оси бруса.

Величина элементарной внутренней касательной силы в произвольной точке сечения равна $\tau \cdot d F$; момент этой силы, действующей по площадке dF относительно оси бруса $d M = \tau \cdot d F \cdot \rho$

Полный момент внутренних касательных сил относительно оси бруса будет равен:

$$M_к = \int_F \tau \cdot \rho \cdot d F, \qquad (7.2)$$

а так как $\tau = G \cdot \rho \cdot \frac{d \varphi}{d z}$, то можно написать

$$M_к = \int_F G \cdot \rho \cdot \frac{d \varphi}{d z} \cdot \rho \cdot d F$$

или $$M_к = G \cdot \frac{d \varphi}{d z} \cdot \int_F \rho^2 \cdot d F \qquad (7.3)$$

Но интеграл $\int_F \rho^2 \cdot d F = I_p$ представляет собой полярный момент инерции площади сечения, поэтому

$$M_к = G \cdot \frac{d \varphi}{d z} \cdot I_p, \qquad (7.4)$$

откуда $$\frac{d \varphi}{d z} = \frac{M_k}{G \cdot I_p}, \qquad (7.5)$$

где dφ - элементарный угол закручивания на длине dz.

Полный угол закручивания:

$$\varphi \int_0^l d \varphi = \int_0^l \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot d z = \frac{M_k}{G \cdot I_p} \cdot \int_0^l d z = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}$$

или окончательно $$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \qquad (7.6)$$

Произведение $G \cdot I_p$ называют жесткостью сечения бруса при кручении.

Из полученной формулы (7.6) следует, что величина угла закручивания φ прямо пропорциональна крутящему моменту $M_к$ и длине бруса l и обратно пропорциональна жесткости сечения при кручении $G \cdot I_p$.

Величина угла закручивания φ измеряется в радианах. Чтобы подучить φ в градусах, необходимо применять формулу:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \qquad (7.7)$$

Подставляя в выражение (7.1) значение (7.5), получим формулу для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{G \cdot \rho \cdot M_k}{G \cdot I_p} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho \ ,$$

окончательно -

$$\tau = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho \qquad (7.8)$$

В формуле (7.8) величина $\frac{M_k}{I_p}$ постоянная для рассматриваемого сечения, следовательно, касательные напряжения изменяются прямопропорционально расстоянию ρ.

Наибольшее значение величины касательных напряжений будет в крайних точках сечения бруса, т.е. при $\rho = \rho_{max} = r$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho_{max} = \frac{M_k}{\frac{I_p}{r}} = \frac{M_k}{W_p} \qquad (7.9)$$

Величина $W_p = \frac{I_p}{r}$ называется полярным моментом сопротивления сечения бруса.

§ 8. Полярный момент сопротивления круга и кольца, расчет круглых брусьев на прочность и жесткость при кручении

Величина полярного момента инерции площади круга:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cong 0,1 \cdot d^4 \left(\quad ^4 \right) \qquad (8.1)$$

Выразив величину полярного момента сопротивления тоже через диаметр, получим:

$$W_p = \frac{I_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cong 0,2 \cdot d^3 \quad (8.2)$$

Из формулы (7.8) следует, что касательные напряжения в точках сечения, близких к центру, т.е. при малых ρ, незначительны. Значит, крутящий момент обусловлен, главным образом, напряжениями, действующими в части сечения, наиболее удаленной от центра, а материал центральной части бруса (вала) используется мало. Поэтому с целью облегчения вала нередко изготовляют их полыми (кольцевого сечения) (рис. 10). Для расчета диаметра такого вала нужно уметь определять величину полярного момента сопротивления его сечения.

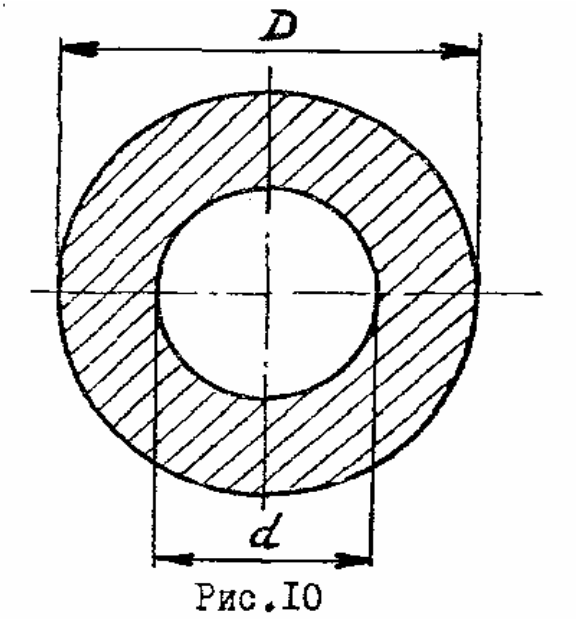


Рис.10

Обозначим наружный диаметр D, а внутренний d. Тогда полярный момент инерции кольцевого сечения определится как разность полярных моментов инерции внешнего и внутреннего кругов:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32} \cong 0,1 \cdot (D^4 - d^4)$$

Полярный момент сопротивления кольцевого сечения:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} \cong 0,2 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Задавшись отношением диаметров $\frac{d}{D} = C$ или $d = C \cdot D$, получим формулы:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}(1 - C^4), \quad (8.3)$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}(1 - C^4). \quad (8.4)$$

Если известна величина полярного момента сопротивления сечения, можно определить наибольшее значение касательного напряжения по фор-

муле (7.9); при этом, по условию прочности оно не должно быть больше допускаемого, т.е.

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_p} \le [\tau]. \qquad (8.5)$$

Полученное уравнение (8.5) является расчетным уравнением при кручении. Подбор диаметра вала из условия прочности производят по формуле:

$$W_p = \frac{M_k}{[\tau]}. \qquad (8.6)$$

Подставив в эту формулу значение полярного момента сопротивления $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$, получим: $\frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{M_k}{[\tau]}$

откуда $$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_k}{\pi \cdot [\tau]}} \cong \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2 \cdot [\tau]}}, \qquad (8.7)$$

или $$d = 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{M_k}{[\tau]}}. \qquad (8.8)$$

По формуле (8.5) можно также определить наибольший крутящий момент:

$$M_k = W_p \cdot [\tau]. \qquad (8.9)$$

Кроме условия прочности, к валу предъявляют требование жесткости. Оно состоит в том, чтобы угол закручивания вала на единице его длины не превышал определенной, наперед заданной величины. При расчете длинных валов условие жесткости предъявляется в первую очередь.

Расчетное уравнение из условия жесткости будет:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p} \le [\varphi], \qquad (8.10)$$

где [φ] - допускаемый угол закручивания.

Перейдем к углу закручивания на длине одного метра вала:

$$\varphi^0 = \frac{M_k \cdot 100}{G \cdot I_p} \cdot \frac{180^0}{\pi}. \qquad (8.11)$$

Подставляя в это уравнение выражение для полярного момента инерции $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, получим расчетную формулу для определения диаметра вала из условия жесткости:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_k \cdot 100 \cdot 180^0}{G \cdot \pi^2 \cdot [\varphi]}} = 15,3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot [\varphi]}} \ (^0/\text{пог.м}). \qquad (8.12)$$

Для полых валов расчетная формула будет иметь вид:

$$D = 15,3 \cdot \sqrt[4]{\frac{M_k}{G \cdot (1 - C^4) \cdot [\varphi]}}, \qquad (8.13)$$

где D - внешний диаметр вала;

$C = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего и внешнего диаметров вала.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

§ 9. Напряжения в наклонных сечениях при одноосном растяжении (сжатии). Закон парности касательных напряжений

Все сказанное до сих пор о напряжениях, возникающих в сечениях растянутого (сжатого) бруса, относилось к поперечным сечениям, которые перпендикулярны к оси бруса. Теперь рассмотрим напряжения, возникающие при осевом растяжении и сжатии в наклонных (косых) сечениях. Это позволит выяснить общую картину напряжений, возникающих в различных сечениях, получить зависимости для определения напряжения, возникающего по любой площадке, и определить, под каким углом располагаются те сечения, в которых напряжения достигают наибольших значений.

Возьмем прямой брус (рис. 11а), растягиваемый силой N, и определим напряжения в нем по наклонному сечению, составляющему с поперечным сечением угол α.

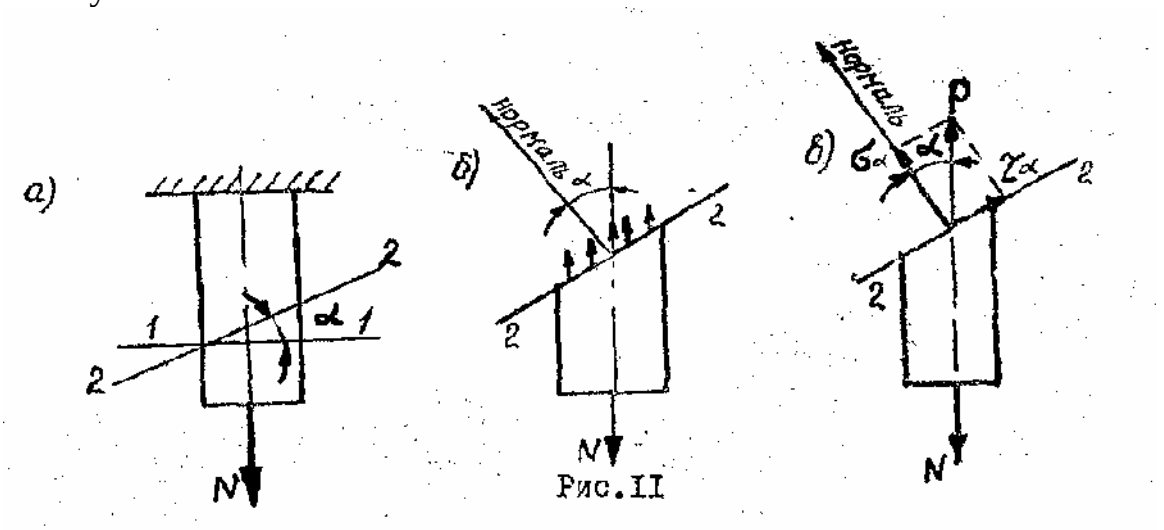


Рис.II

Внешняя нормаль составит с осью бруса также угол α, причем, последний отсчитывается в направлении против движения часовой стрелки от линии действия силы N до нормали к плоскости наклонного сечения (рис. 11б).

Рассечем мысленно брус сечением 2-2, отбросим верхнюю часть его и заменим действие отброшенной части на нижнюю внутренними силами, параллельными оси бруса и распределенными равномерно по всему сечению. Равнодействующая этих сил будет равна растягивающей силе N.

Если через F обозначить площадь поперечного сечения 1 – 1, то площадь наклонного сечения 2 - 2 - $F_\alpha = \frac{F}{Cos\alpha}$, а полное напряжение в сечении:

$p = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N \cdot Cos\alpha}{F} = \sigma \cdot Cos\alpha$, где $\sigma = \frac{N}{F}$.

Величина Р, следовательно, зависит от угла α: чем меньше угол α, тем больше напряжение Р.

При α = 0 сечение 2-2 совпадает с сечением 1-1, Cos α = 1, тогда $p = \frac{N}{F} = \sigma$, т.е. в этом случае полное напряжение будет равно нормальному осевому напряжению.

При увеличении угла α до 90°, Cosα = 0 и, стало быть р = 0; т.е. по площадкам, параллельным оси бруса, полное напряжение, а значит, и нормальное напряжение равно нулю.

Разложим напряжение р на составляющие в плоскости 2-2 и перпендикулярно к ней (рис. 11в). Составляющая, нормальная к площадке 2-2, представляет собой нормальное напряжение по наклонной площадке, а составляющая, действующая в самой площадке 2-2 - касательное напряжение.

Величина нормального напряжения:

$$\sigma_\alpha = p \cdot Cos\alpha = \sigma \cdot Cos\alpha \cdot Cos\alpha = \sigma \cdot Cos^2\alpha ,$$

а величина касательного напряжения:

$$\tau_\alpha = p \cdot Sin\alpha = \sigma \cdot Cos\alpha \cdot Sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2\alpha ,$$

или окончательно:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot Cos^2\alpha , \qquad (9.1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2\alpha . \qquad (9.2)$$

Из полученных формул (9.1) и (9.2) следует, что оба вида напряжений по наклонному сечению зависят от величины угла α. Чем меньше угол α, тем больше будет нормальное напряжение.

При α = 0 оно равно осевому нормальному напряжению, поскольку $Cos^2 0 = 1$.

С увеличением угла α нормальное напряжение σ_α убывает и при α = 90°; $\sigma_\alpha = 0$, так как $Cos90^0 = 0$. При α =45° нормальное напряжение в наклонном сечении:

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot Cos^2\alpha = \sigma \cdot Cos^2 45^0 = \sigma \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sigma}{2}$$

Касательное напряжение с изменением угла α от 0 до 90° сначала возрастает от нуля (при α = 0) до наибольшего своего значения (при α = 45°):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2 \cdot 45^0 = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin90^0 = \frac{\sigma}{2};$$

а затем с увеличением угла от 45° касательное напряжение убывает и при α=90° становится равным нулю:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2 \cdot 90^0 = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin180^0 = 0.$$

Таким образом, наибольшие нормальные напряжения возникают по площадкам, перпендикулярным к оси бруса, а наибольшие касательные напряжения - по площадкам, расположенным под углом 45° к оси бруса и равны половине осевого нормального напряжения, т. е. $\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}$.

По площадкам же, параллельным оси бруса (при α =90°), $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$, т.е. в продольных плоскостях бруса не возникает ни нормальных, ни касательных напряжений. Отсюда следует, что между продольными волокнами растянутого (сжатого) бруса не возникает ни взаимного нажатия, ни отрыва.

В любом наклонном сечении бруса будут возникать одновременно оба вида напряжений: нормальные и касательные.

Теперь определим напряжения по сечению 3-3, перпендикулярному к сечению 2-2 (рис. 12а, б). Нормаль к площадке 3-3 составит с осью бруса угол $\alpha_1 = 270^0 + \alpha$.

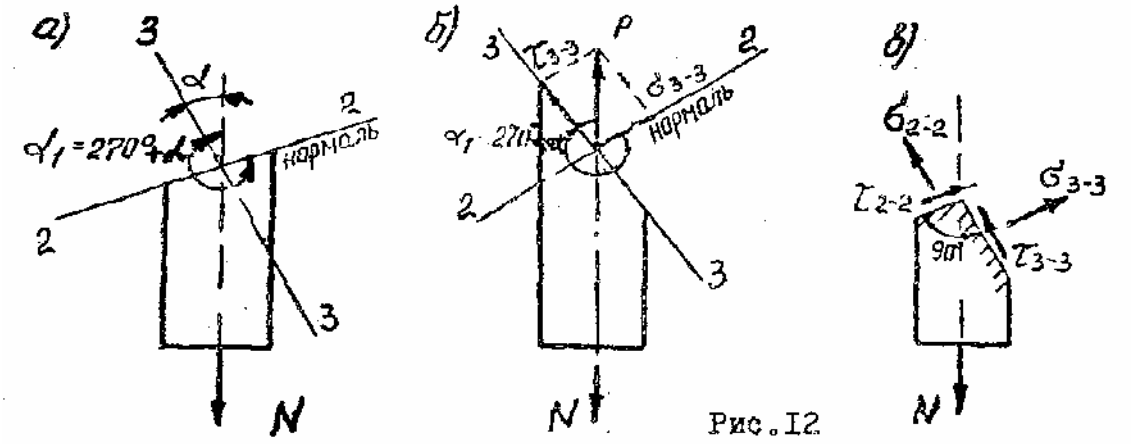


Рис.12

Для определения нормального и касательного напряжений по площадке 3-3 применим формулы (9.1) и (9.2). Подставив в них значение угла $\alpha_1 = 270^0 + \alpha$, получим:

$$\sigma_{3-3} = \sigma \cdot Cos^2\alpha = \sigma \cdot Cos^2(270^0 + \alpha) = \sigma \cdot Sin^2\alpha.$$

Касательные напряжения:

$$\tau_{3-3} = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2 \cdot (270^0 + \alpha) = \frac{\sigma}{2} \cdot Sin2\alpha.$$

Сравнивая формулы (9.1) и (9.2) с полученными, можно сделать следующие выводы:

а) величины нормальных напряжений по двум любым взаимно перпендикулярным сечениям различны, но сумма их постоянна и равна осевому нормальному напряжению, т.е.:

$$\sigma_{2-2} + \sigma_{3-3} = \sigma \cdot Cos^2\alpha + \sigma \cdot Sin^2\alpha = \sigma \cdot (Cos^2\alpha + Sin^2\alpha) = \sigma$$

б) касательные напряжения по двум любым взаимно перпендикулярным сечениям равны по величине, но противоположны по знаку:

$$\tau_{2-2} = -\tau_{3-3}.$$

Следовательно, если представить себе брус разрезанным секущими площадками 2-2 и 3-3 (рис. 12в), то касательные напряжения по ним или сходятся к вершине прямого угла, или расходятся от нее. Это положение, справедливое не только в случаях растяжения или сжатия, но и для других деформаций, при которых возникают касательные напряжения, называется законом парности касательных напряжений. Он читается так: касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам и перпендикулярные к их общему ребру пересечения, численно равны между собой и направлены оба либо к ребру, либо от ребра (обратны по знаку).

§ 10. Напряжения в наклонных сечениях при плоском напряженном состоянии

Из напряженного тела выделим элементарный объем в виде треугольной призмы и рассмотрим ее равновесие (рис.13).

Будем считать, что горизонтальная и вертикальная грани призмы являются исходными площадками, по которым действуют заданные напряжения τ_{xy} и τ_{yx}.

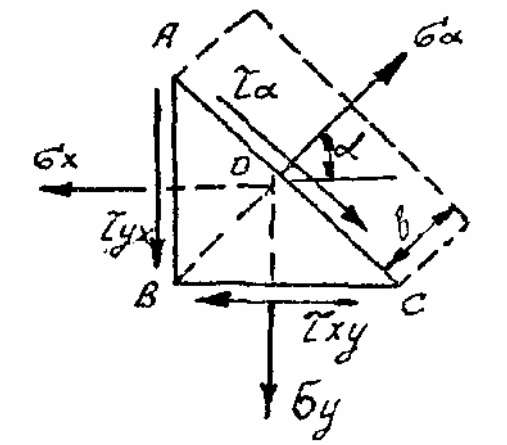


Рис.13

Определим нормальные и касательные напряжения σ_α и τ_α, действующие в наклонной площадке. Для этого спроектируем все силы, действующие на призму, на направление σ_α:

$$\sigma_\alpha \cdot AC \cdot b - \sigma_x \cdot AB \cdot b \cdot Cos\alpha -$$
$$-\sigma_y \cdot BC \cdot b \cdot Sin\alpha - \tau_{yx} \cdot AB \cdot b \cdot Sin\alpha -$$
$$-\tau_{xy} \cdot BC \cdot b \cdot Cos\alpha = 0$$

Если выразим все стороны призмы через одну сторону АВ и умножим все члены на Cosα, получим при $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cdot Cos^2\alpha + \sigma_y \cdot Sin^2\alpha + \tau_{yx} \cdot Sin2\alpha \ . \qquad (10.1)$$

Эту формулу можно преобразовать, учитывая, что

$$Sin^2\alpha = \frac{1 - Cos2\alpha}{2}; \ Cos^2\alpha = \frac{1 + Cos2\alpha}{2}.$$

Итак, получим:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot Cos2\alpha + \tau_{xy} \cdot Sin2\alpha \ . \qquad (10.2)$$

Теперь спроектируем все силы на направление τ_α:

$$\tau_\alpha \cdot AC \cdot b - \sigma_x \cdot AB \cdot b \cdot Sin\alpha + \sigma_y \cdot BC \cdot b \cdot Cos\alpha +$$

$$+\tau_{yx} \cdot AB \cdot b \cdot Cos\alpha - \tau_{xy} \cdot BC \cdot b \cdot Sin\alpha = 0 \ .$$

Делая аналогичные преобразования, как и при выводе формулы (10.2), будем иметь:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot Sin2\alpha - \tau_{xy} \cdot Cos2\alpha \ . \qquad (10.3)$$

§ 11. Главные площадки и главные напряжения. Обобщенный закон Гука.

Главными площадками называются такие взаимно перпендикулярные площадки, по которым действуют наибольшие и наименьшие нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Напряжения, действующие по этим площадкам называются главными.

Для нахождения угла наклона главных площадок нужно найти максимум и минимум нормальных напряжений. Для этого возьмем первую производную от выражения (10.1) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \cdot \sigma_x \cdot Cos\alpha \cdot Sin\alpha + 2 \cdot \sigma_y \cdot Sin\alpha \cdot Cos\alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot Cos2\alpha = 0 \ , (11.1)$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot Sin2\alpha + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot Cos2\alpha = 0 \ . \qquad (11.2)$$

После деления каждого члена уравнения на $Cos2\alpha$ получим:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cdot tg\,2\alpha + 2 \cdot \tau_{xy} = 0 \qquad (11.3)$$

откуда

$$tg\,2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \ . \qquad (11.4)$$

Учитывая, что $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, получим:

$$tg\,2\alpha = -\frac{2\cdot\tau_{yx}}{\sigma_x-\sigma_y}. \qquad (11.5)$$

Полученные формулы(11.5), (11.4) дают возможность определить угол наклона главных площадок – α.

Если α получится положительным, его следует отложить против часовой стрелки; и наоборот, если α отрицательный - по часовой стрелке.

Так как угол 2 отличается от другого значения на 180°, то α будет отличаться на 90°. Отсюда следует, что главные площадки взаимно перпендикулярны.

Подставив выражение (11.4) в (10.1), будем иметь формулу для определения величины главных напряжений:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\cdot\tau_{xy}{}^2}. \qquad (11.6)$$

Как исходные нормальные напряжения σ_x, σ_y, так и главные считаются положительными, если они растягивающие и, наоборот, отрицательными, если они являются сжимающими.

За положительное касательное напряжение τ_{xy} принимается такое, которое может осуществить вращение по часовой стрелке, и, наоборот, против часовой стрелки - считается отрицательным.

Докажем, что в главных площадках касательные напряжения равны нулю. Для этого умножим все члены уравнения (11.2) на $-\frac{1}{2}$:

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot Sin2\alpha + \tau_{xy}\cdot Cos2\alpha = 0$$

Полученное выражение для касательных напряжений равно нулю, что и требовалось доказать (см. 10.3).

Различают три вида напряженных состояний

1. Объемное - когда все три главных напряжения отличны от нуля (рис.14в).

2. Плоское - когда одно из главных напряжений равно нулю (рис. 14б).

3. Линейное - когда два главных напряжения равны нулю (рис. 14а).

Главные напряжения обозначают через σ_1, σ_2, σ_3. Рассматривая их в порядке убывания, будем иметь: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. При линейном напряженном состоянии единственное отличное от нуля главное напряжение обозначится либо через σ_1, если оно положительно (тогда $\sigma_2=0$; $\sigma_3=0$), либо через σ_3, если оно отрицательно (тогда $\sigma_1=0$; $\sigma_2=0$). При плоском напряженном состоянии два отличных от нуля главных напряжения обозначаются либо через σ_1 и σ_2, если оба положительны ($\sigma_3=0$), либо через σ_2 и σ_3, если оба отрицательны ($\sigma_1=0$), либо через σ_1 и σ_3, если они разнозначны ($\sigma_2=0$).

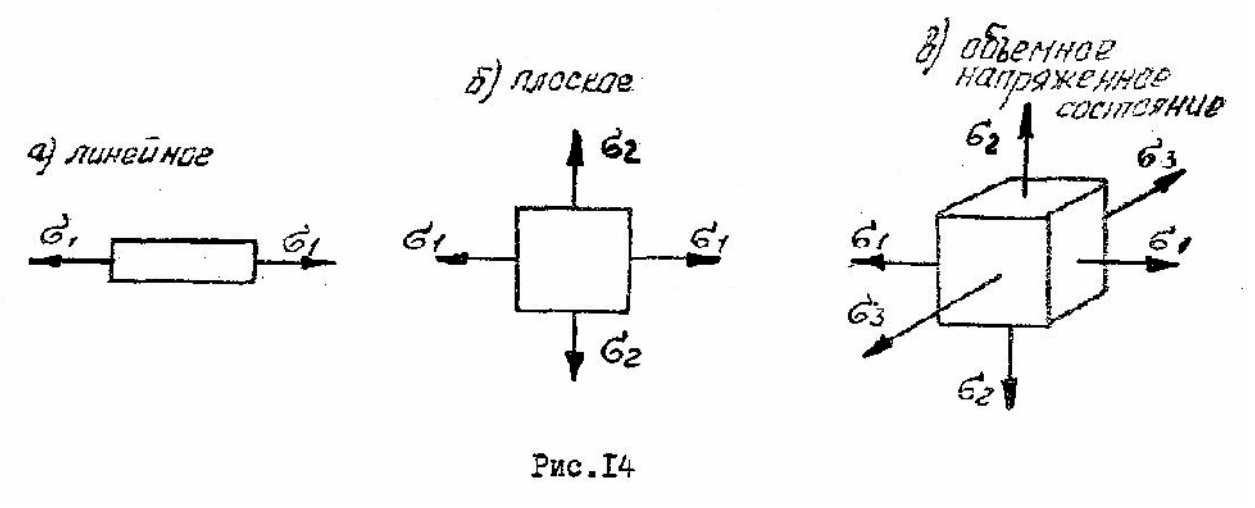


Рис.I4

Деформации в направлении глазных напряжений - главные деформации в данной точке - определяются на основе обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \mu\cdot(\sigma_2+\sigma_3)\right], \tag{11.7}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \mu\cdot(\sigma_3+\sigma_1)\right], \tag{11.8}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \mu\cdot(\sigma_1+\sigma_2)\right], \tag{11.9}$$

где μ - коэффициент Пуассона.

В частных случаях приведенные формулы упрощаются. Так, для линейного напряженного состояния с $\sigma_1>0$; $\sigma_2=\sigma_3=0$:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E};\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu\cdot\frac{\sigma_1}{E}$$

В случае, когда напряженное состояние во всех точках тела одинаково, такое напряженное состояние называется однородным.

Обобщенный закон Гука относительно главных напряжений, для плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_1+\mu\cdot\varepsilon_2);\ \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\cdot(\varepsilon_2+\mu\cdot\varepsilon_1)$$

Относительная объемная деформация вычисляется по одной из формул:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3;$$

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\cdot\mu}{E}\cdot\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right). \tag{11.10}$$

Напряжения на наклонных площадках вычисляются по формулам:

при плоском напряженном состоянии:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \sigma_1\cdot\cos^2\alpha+\sigma_2\cdot\sin^2\alpha,\\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cdot\sin 2\alpha;\end{aligned} \tag{11.11}$$

при линейном напряженном состоянии:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cdot Cos^2\alpha, \qquad \tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \cdot Sin2\alpha\,, \qquad (11.12)$$

где σ_α; τ_α - соответственно нормальное и касательное напряжение в наклонной площадке, проведенной под углом α.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Геометрическими характеристиками плоских сечений являются площадь, статические моменты плоских сечений, моменты инерции.

§ 12. Статические моменты и центры тяжести плоских сечений

Статическим моментом плоского сечения относительно оси, лежащей в плоскости сечения, называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до этой оси (рис.15).

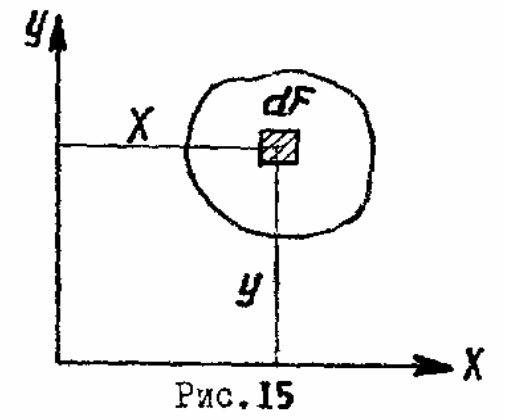


Рис. 15

Если известны координаты центра тяжести сечения, то статические моменты определяют по формулам:

$$S_x = F \cdot y_c;\; S_y = F \cdot x_c$$

где F - площадь сечения.

Статические моменты плоских сечений могут быть положительными, отрицательными и равными кулю.

Статические моменты сечения равны нулю относительно центральных осей. При практических расчетах редко приходится вычислять статические моменты путем интегрирования. Сложные сечения можно разбить на простейшие части, для каждой из которых известны площадь и координаты центра тяжести, т.е. статические моменты. Статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов составляющих частей:

$$S_x = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n,$$
$$S_y = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + ... + F_n \cdot x_n,$$

где $F_1, F_2, \ldots, F_n$ - площади отдельных частей сечения, на которые разбито сложное сечение;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - координаты их центров тяжести относительно выбранных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ осей.

Зная статические моменты плоского сечения, можно вычислить координаты центра тяжести сечения относительно выбранных осей:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + ... + F_n \cdot x_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n};\; y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n}{F_1 + F_2 + ... + F_n}.$$

§ 13. Моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции плоских сечений

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно данной оси называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF \text{ (см}^4\text{)}, \qquad (13.1)$$

$$I_y = \int_F x^2 \cdot dF \text{ (см}^4\text{)}. \qquad (13.2)$$

Осевые моменты инерции всегда положительны и не могут быть равны нулю.

Центробежным моментом инерции плоского сечения называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояния до двух взаимно перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \text{ (см}^4\text{)}. \qquad (13.3)$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Осевые и центробежные моменты инерции плоского сечения относительно осей, параллельных центральным осям, определяют по формулам:

$$I_x = I_{x_c} + a^2 \cdot F, \qquad (13.4)$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot F, \qquad (13.5)$$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + a \cdot b \cdot F, \qquad (13.6)$$

где I_{x_c} и I_{y_c} - осевые моменты инерции относительно центральных осей;

$I_{x_c y_c}$ - центробежный момент инерции относительно центральных осей;

a, *b* - расстояния между выбранными осями и параллельными им центральными осями.

При повороте осей на угол α моменты инерции определяют по формулам:

$$I_{x_1} = I_x \cdot Cos^2\alpha + I_y \cdot Sin^2\alpha - I_{xy} \cdot Sin2\alpha, \qquad (13.7)$$

$$I_{y_1} = I_y \cdot Cos^2\alpha + I_x \cdot Sin^2\alpha + I_{xy} \cdot Sin2\alpha, \qquad (13.8)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot Sin2\alpha + I_{xy} \cdot Cos2\alpha. \qquad (13.9)$$

Когда значение угла поворота осей достигнет величины, определяемой формулой:

$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}, \qquad (13.10)$$

тогда осевые моменты инерции достигают своего максимума и минимума, а центробежный момент инерции становится равным нулю. Оси, занимающие такое положение, называются главными осями инерции, а соответствующие экстремальные осевые моменты инерции - главными моментами инерции. Главные оси инерции, проходящие через центр тяжести плоского сечения, называются главными центральными осями инерции.

Величину главных моментов инерции определяют по формуле:

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}\,. \qquad (13.11)$$

Моментом сопротивления сечения называется отношение осевого момента инерции к расстоянию от нейтральной оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}\ (\text{см}^3), \qquad (13.12)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}\ (\text{см}^3). \qquad (13.13)$$

Радиусом инерции сечения относительно оси называется величина, определяемая по формуле:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}\ (\text{см}), \qquad (13.14)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}\ (\text{см}). \qquad (13.15)$$

§ 14. Вывод формул зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей

Пусть у какого-нибудь сечения площадью F (рис. 16) ось X будет центральной, а ось X_1 - параллельная ей на расстоянии *a*. Выделим в сечении элементарную площадку dF на расстоянии y от оси x, тогда расстояние площадки *dF* от оси X_1 будет $y_1 = y + a$.

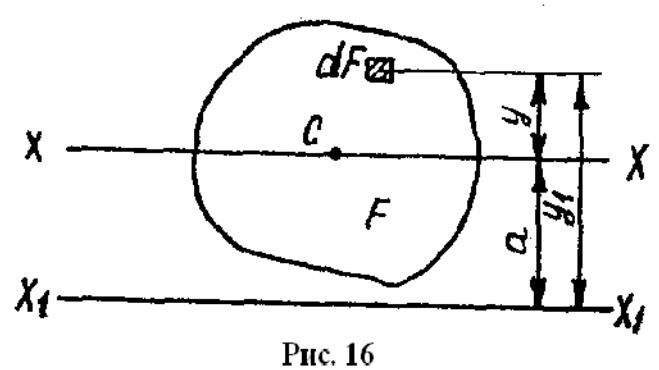


Рис. 16

Напишем выражение момента инерции площади сечения относительно оси X_1:

$$I_x = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y+a)^2 \cdot dF = \int_F (y^2 + 2 \cdot a \cdot y + a^2) \cdot dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2 \cdot a \cdot \int_F y \cdot dF + a^2 \cdot \int_F dF$$

В полученном выражении первый интеграл представляет собой осевой момент инерции относительно оси *X*, проходящей через центр тяжести, т.е. $\int_F y^2 \cdot dF = I_x$, второй интеграл выражает собой статический момент всей площади сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения, и, следовательно, равный нулю, т.е. $2 \cdot a \cdot \int_F y \cdot dF = 0$.

Последний интеграл $\int_F dF$ выражает собой площадь всего сечения F. Таким образом, момент инерции сечения относительно оси X_1:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot F. \qquad (14.1)$$

Полученная формула читается так: момент инерции площади сечения относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр тяжести сечения, плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями. При помощи этой формулы можно вычислить моменты инерции любого сложного сечения.

Аналогично записываются формулы перехода для осевого I_{y_1} и центробежного $I_{x_1 y_1}$ моментов инерции:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 \cdot F, \qquad (14.2)$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + a \cdot b \cdot F. \qquad (14.3)$$

В формулах (14.1) и (14.3) величина *a* - расстояние от центральной оси инерции *X* до оси X_1, а величина *b* - расстояние от центральной оси инерции *y* до оси y_1.

Для определения момента инерции сложного сечения его разбивают на элементарные сечения (прямоугольники, треугольники и т.д.), затем вычисляют моменты инерции элементарных сечений относительно центральной оси сложного сечения и суммируют их.

Приведем без доказательства формулы перехода для моментов инерции при повороте осей на некоторый угол α. Предположим, что какое-нибудь сечение имеет моменты инерции I_x, I_y, I_{xy} относительно осей координат *X* ,*У* (рис.17). Требуется определить моменты инерции того же сечения относительно осей X_1 $У_1$, повернутых на некоторый угол α (рис.17).

Моменты инерции сечения относительно нового положения осей определяются по формулам:

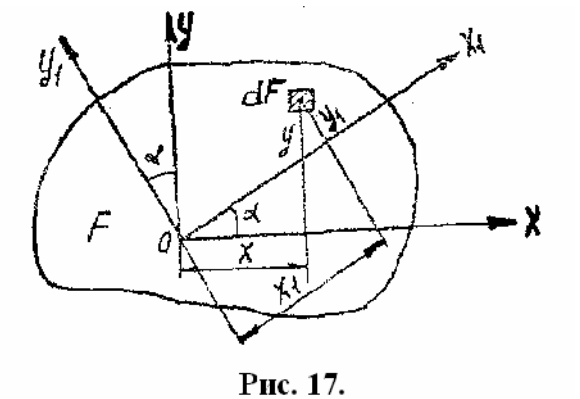


Рис. 17.

$$I_{x_1} = I_x \cdot Cos^2\alpha + I_y \cdot Sin^2\alpha - I_{xy} \cdot Sin2\alpha, \quad (14.4)$$

$$I_{y_1} = I_y \cdot Cos^2\alpha + I_x \cdot Sin^2\alpha + I_{xy} \cdot Sin2\alpha, \quad (14.5)$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot Sin2\alpha + I_{xy} \cdot Cos2\alpha \quad (14.6)$$

§ 15. Главные оси инерции и главные центральные моменты инерции (вывод формул)

Величины моментов инерции I_{x_1}, I_{y_1} и $I_{x_1 y_1}$ относительно повернутых осей зависят от угла α.

Практически очень важно знать такое положение осей X_1 $У_1$, при котором осевые моменты инерции I_{x_1}, I_{y_1} будут иметь экстремальное значение, т.е. один из них будет иметь наибольшее, а другой - наименьшее значение.

Если у сечения ось симметрии принята за ось *X* или ось *У*, то центробежный момент инерции равен нулю, так как в этом случае каждому элементу *dF* с положительным *У* соответствует равный и симметрично расположенный элемент *dF'* с отрицательным *У*. Элементарные произведения $x \cdot y \cdot dF$ взаимно уничтожаются и интеграл $\int_F x \cdot y \cdot dF$ обращается в нуль.

Покажем, что для любой точки произвольного плоского сечения можно найти такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции будет равен нулю. Пусть для произвольного сечения координатные оси *X* и *У* повернуты против движения часовой стрелки вокруг начала координат на 90° и заняли положение X^1 и $У^1$ (рис. 18).

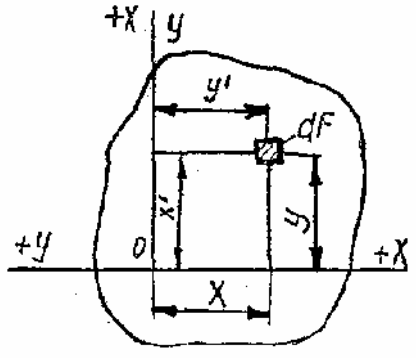


Рис.18

Если теперь выразить новые координаты через старые, получим: $x' = +y$; $y' = -x$

Тогда центробежный момент инерции относительно новых осей:

$$I_{x'y'} = \int_F x' \cdot y' \cdot dF = -\int_F x \cdot y \cdot dF = -I_{xy}$$

т.е. получается, что при повороте координатных осей на 90°, центробежный

момент инерции меняет знак. Поэтому всегда будет и такое положение осей, относительно которых величина центробежного момента инерции равна нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции плоского сечения равен пулю, называют главными осями инерции. Если начало координат совпадает с центром тяжести сечения, то соответствующие главные оси называются главными центральными осями инерции, а моменты инерции относительно главных осей называются главными центральными моментами инерции.

Главные моменты инерции имеют предельные (экстремальные) значения: один из них I_{max}, а другой - I_{min}.

Оси симметрии любого сечения являются главными осями инерции. У таких сечений, как тавр, швеллер и т.д., ось симметрии является главной осью инерции. Другой главной центральной осью инерции будет перпендикулярная к ней ось, проходящая через центр тяжести сечения.

Чтобы определить положение главных осей сечения, не имеющего осей симметрии, необходимо найти величину угла, на который нужно повернуть первоначальные оси. Выведем формулу для определения этого угла. Положим, что нам известны моменты инерции I_x, I_y, I_{xy} какого-либо сечения относительно произвольных осей *X* и *У*. Центробежный момент инерции сечения относительно других координатных осей X_1 и $У_1$ с тем же началом координат, но повернутых относительно осей *X* и *У* на угол α, получим по формуле (14.6):

$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \cdot Sin2\alpha + I_{xy} \cdot Cos2\alpha$$

Для определения угла, на который нужно повернуть первоначальные оси, чтобы сделать их главными, необходимо приравнять к нулю центробежный момент инерции $I_{x_1y_1}$: $\frac{I_x - I_y}{2} \cdot Sin2\alpha + I_{xy} \cdot Cos2\alpha = 0$

откуда
$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y}. \qquad (15.1)$$

Подставив в полученную формулу (15.1) значения I_x, I_y, I_{xy}, найдем для угла *2*α два значения, отличающихся на 180°; сами же углы будут отличаться друг от друга на 90°. Поэтому главные оси будут перпендикулярны друг к другу.

Если при известных I_x, I_y, I_{xy} величины $Sin^2\alpha$, $Cos^2\alpha$, $Sin2\alpha$ в формулах (14.4) и (14.5) выразить через $tg2\alpha$, определяемый по формуле (15.1), то получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}\,, \qquad (15.2)$$

или $$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4 \cdot I_{xy}^2}\,. \qquad (15.3)$$

§ 16. Определение моментов инерции простейших сечений
Осевой момент инерции прямоугольника

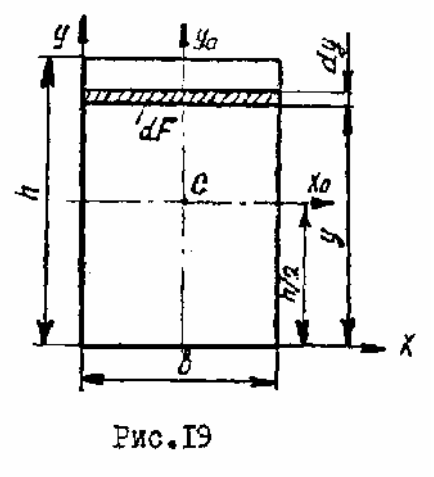


Рис.19

Разбив прямоугольник с основанием b и высотой h (рис.19) на бесконечно узкие горизонтальные полоски, возьмем одну из них на расстоянии *y* от оси *z*. Ширина этой полоски b, высота dy. Момент инерции ее относительно оси *X* будет равен произведению площади полоски $b \cdot dy$ на квадрат расстояния *У*:

$$dI_x = b \cdot dy \cdot y^2$$

Момент инерции прямоугольника относительно основания выразится суммой моментов инерции всех бесконечно узких полос. Применяя формулу (13.1), получим:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \left|\frac{y^3}{3}\right|_0^h = \frac{b \cdot h^3}{3} \qquad (16.1)$$

Используя формулу (14.1), найдем момент инерции относительно центральной оси X_0:

$$I_{x_0} = I_x - a^2 \cdot F = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}\,, \qquad (16.2)$$

где $a = \frac{h}{2}$.

Очевидно, что момент инерции прямоугольника относительно оси Y_0:

$$I_{y_0} = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad (16.3)$$

Приняв $b = h = a$, получим формулу для определения момента инерции квадратного сечения со стороной *a*.

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{a^4}{12} \qquad (16.4)$$

Момент инерции круга

Сначала определим полярный момент инерции круга. Для этого берем круг радиуса r (рис.20) и разбиваем его на бесконечно малые концентрические кольца шириной dρ. Взяв одно из колец радиусом ρ, определим его полярный момент инерции:

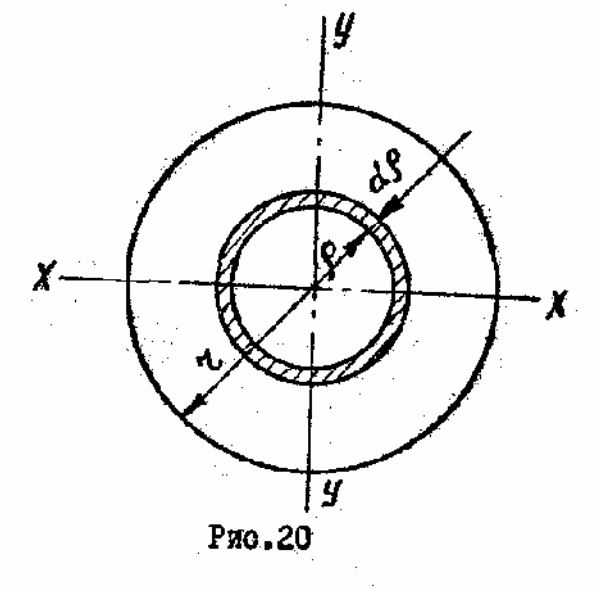


Рис.20

$$dI_p = 2\cdot\pi\cdot\rho\cdot d\rho\cdot\rho^2 = 2\cdot\pi\cdot\rho^3\cdot d\rho .$$

Для определения полярного момента инерции площади круга необходимо просуммировать моменты инерции всех элементарных колец, начиная с кольца, у которого $\rho=0$, и кончая кольцом с $\rho=r$, т.е.

$$I_p = \int_0^r 2\cdot\pi\cdot\rho^3\cdot d\rho = 2\cdot\pi\cdot\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{2\cdot\pi\cdot r^4}{4} = \frac{\pi\cdot r^4}{2},$$

или окончательно

$$I_p = \frac{\pi\cdot r^4}{2} \qquad (16.5)$$

Выражая полярный момент инерции площади круга через диаметр, получим:

$$I_p = \frac{\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi\cdot d^4}{32}, \qquad (16.6)$$

или окончательно

$$I_p = \frac{\pi\cdot d^4}{32} = 0{,}1\cdot d^4 \ (\text{см}^4). \qquad (16.7)$$

Ввиду симметрии круга относительно любого диаметра, осевые моменты инерции относительно любых осей, проходящих через центр круга, равны между собой, поэтому $I_x = I_y = I$, а так как $I_p = I_x + I_y$, то величина осевого (экваториального) момента инерции площади круга относительно любой

оси, проходящей через центр круга, равна половине полярного момента инерции, т.е.

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 0,05 \cdot d^4 \text{ (см}^4\text{).} \qquad (16.8)$$

Осевой момент инерции кругового кольца

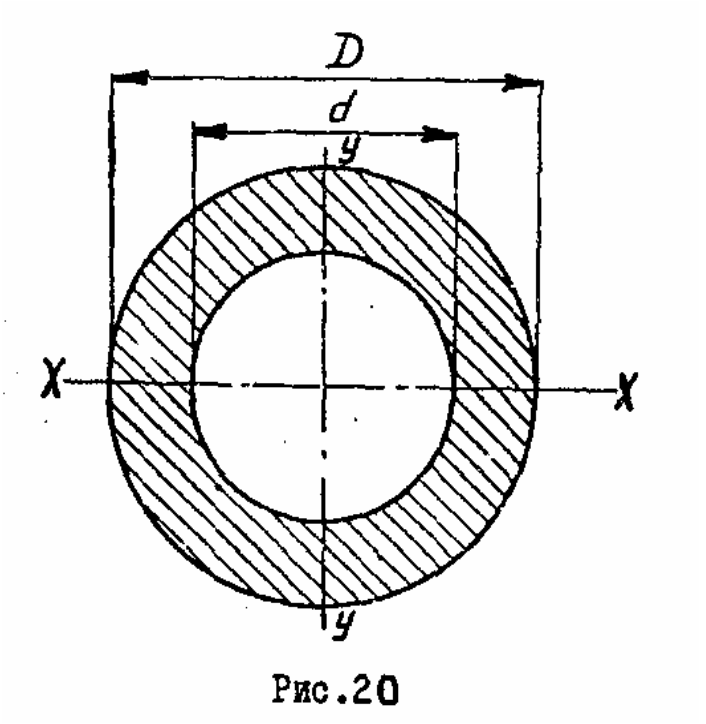


Рис.20

Осевой момент инерции кругового кольца определяется как разность осевых моментов инерции большого круга диаметром *D* и малого круга диаметром *d* (рис. 21):

$$I_x = I_y \cong 0,05 \cdot (D^4 - d^4) . \qquad (16.9)$$

Осевой момент инерции треугольника

Разбиваем площадь треугольника на бесконечно узкие полоски шириной *dy* и выделим одну из них, находящуюся на расстоянии *y* от оси X_1 (рис. 22).

Из подобия треугольников ABC и aBc определяем расстояние *x*:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{h}; \qquad x = \frac{b \cdot y}{h} .$$

Площадь элементарной полоски: $dF = x \cdot dy = \frac{b \cdot y}{h} \cdot dy$.

Осевой момент инерции площади треугольника относительно оси X_1:

$$I_{x_1} = \int_F y^2 \cdot dF = \int_0^h \frac{b \cdot y}{h} y^2 \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy = \frac{b}{h} \cdot \left| \frac{y^4}{4} \right|_0^h = \frac{b}{h} \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{b \cdot h^3}{4}$$

Окончательно: $$I_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{4} \qquad (16.10)$$

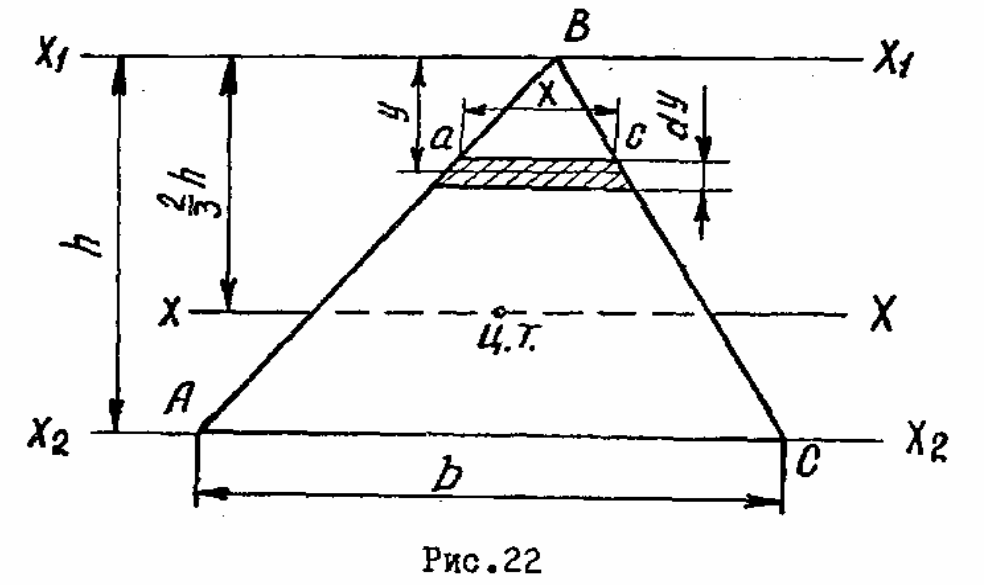


Рис.22

Также путем интегрирования находят моменты инерции треугольника относительно оси X_2, совпадающей с основанием, и относительно центральной оси *X* по формуле (14.1):

$$I_{x_2} = \frac{b \cdot h^3}{12}, \qquad (16.11)$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}. \qquad (16.12)$$

ИЗГИБ

§ 17. Основные понятия и определения

Деформация изгиба характеризуется тем, что в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты и часто, одновременно с последними, - поперечные силы.

Изгиб называют чистым, если в сечениях балки возникают только изгибающие моменты. Если же наряду с изгибающими моментами в сечениях балки возникают и поперечные силы, изгиб называют поперечным.

Деформация изгиба имеет место в результате действия внешних сил, приложенных перпендикулярно к оси балки, а также от пар сил, плоскость действия которых проходит через ее ось.

Плоскости, в которых лежат главные центральные оси инерции поперечных сечений, называют главными плоскостями балки.

Если плоскость действия сил (силовая плоскость) проходит через одну из главных плоскостей балки и ось ее деформируется (искривляется) в этой же плоскости, изгиб называют плоским или прямым.

Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей балки, изгиб называют косым.

Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения балки называется силовой линией (рис. 23).

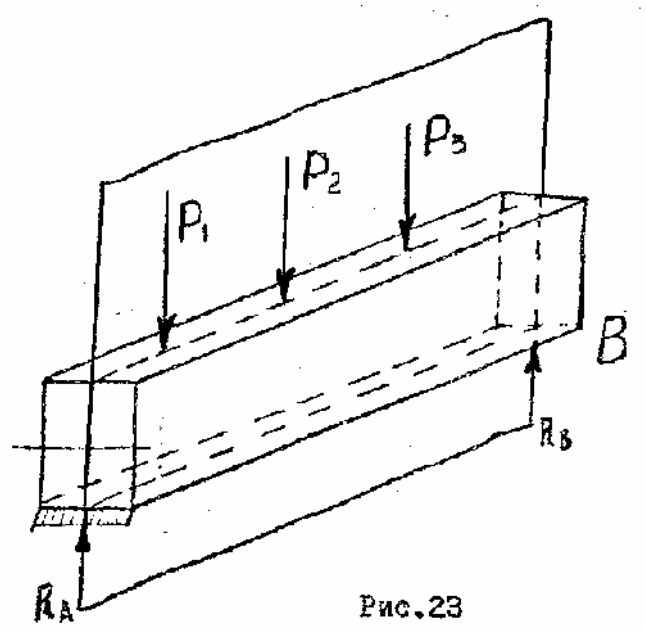


Рис.23

Внешние силы, приложенные к балке, обычно представляют собой результат воздействия отдельных частей конструкции, опирающихся на нее. Их можно свести к сосредоточенным силам, равномерно или неравномерно распределенным по длине балки нагрузкам и к парам сил.

Распределенные нагрузки могут действовать на балку равномерно или неравномерно по всей ее длине. Измеряют их величиной нагрузки, приходящейся на единицу длины балки и выражающейся в т/м, кг/см. Эту величину погонной нагрузки на балку обозначают q и называют интенсивностью распределенной нагрузки (рис. 24а).

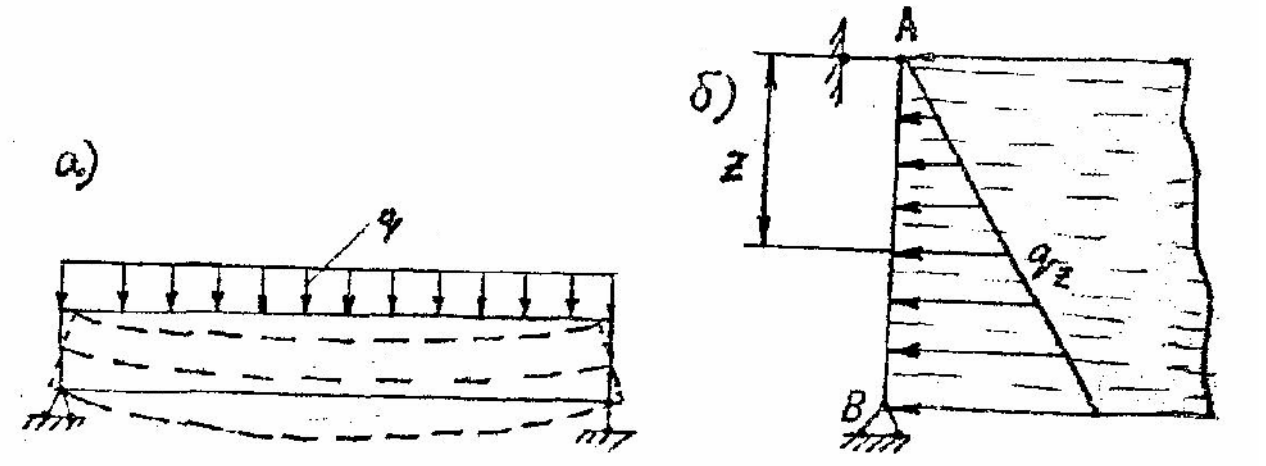


Рис.24

При неравномерно распределенной нагрузке интенсивность ее меняется по длине балки. В этом случае ее обозначают q_z - интенсивность распределенной нагрузки для сечения балки на расстоянии от опоры. Например, давление воды на стойку плотины в сечении на длине от опоры А (рис. 24б) или давление земли на подпорную стенку.

При изучении изгиба будем рассматривать лишь такие балки, сечения которых имеют одну или две оси симметрии, а действующие внешние силы лежат в одной из плоскостей симметрии.

При определении опорных реакций балки будем пользоваться уравнениями статики, выражающими условия равновесия всех внешних сил, приложенных к ней (в том числе и реакций). Таких уравнений для сил, лежащих в плоскости, можно написать три. Следовательно, в случае наличия трех неизвестных реакций их можно определить при помощи уравнений статики. Поэтому балки, в опорах которых возникает не больше трех реакций, называются статически определимыми. Балки, для определения опорных реакций которых уравнений статики недостаточно, называются статически неопределимыми.

§ 18. Поперечная сила Q и изгибающий момент M. Правила знаков Q и M.

Пусть балка AB, свободно лежащая на двух опорах, находится под действием двух сил P_1 и P_2, расположенных в плоскости ее симметрии (рис. 25а).

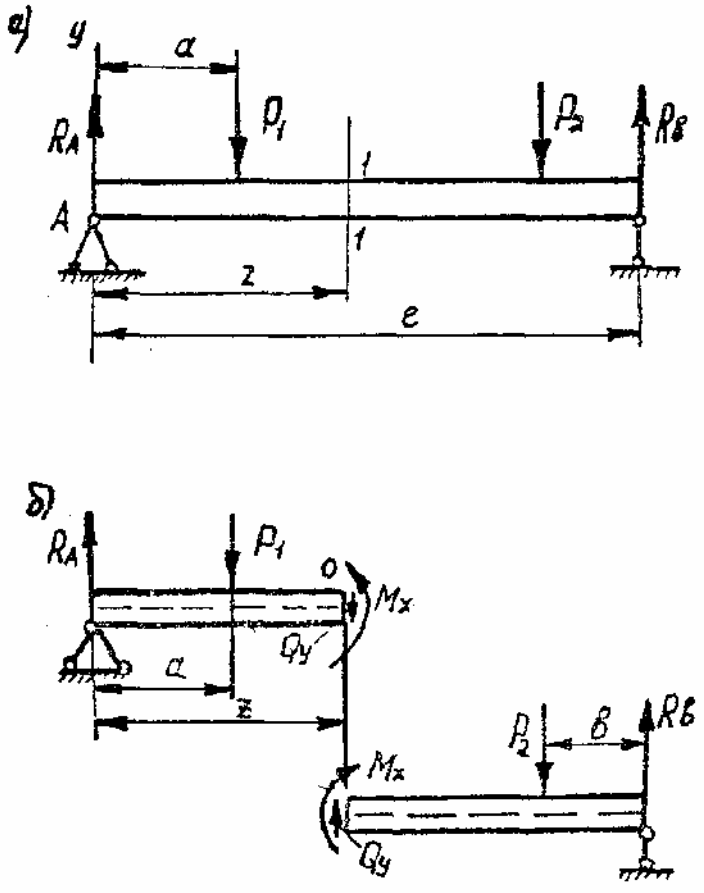


Рис.25

Отбросив опоры и заменив их опорными реакциями R_A и R_B, будем рассматривать балку как находящуюся под действием внешних сил P_1, P_2, R_A и R_B. Эти силы вызывают в сечениях балки внутренние силы упругости, которые определим при помощи метода сечений.

Сечением I-I на расстоянии z от левой опоры рассечем балку на две части и, отбросив правую часть, рассмотрим условия равновесия оставшейся части (рис. 25б). Очевидно, что оставшаяся часть балки будет находиться в равновесии под действием внешних сил R_A, P_1 и внутренних сил по сечению I-I, эквивалентных действию отброшенной части балки на оставшуюся. По условию равновесия внутренние силы в рассматриваемом, сечении обеих частей балки будут численно равны, но противоположны по направлению.

Заменим действие отброшенной правой части на оставшуюся внутренними силами, равнодействующая которых должна быть расположена в плоскости действия внешних сил R_A и P_1. Обозначив проекцию этой равнодействующей на ось *y* через Q_y, а ее момент относительно центра тяжести рассматриваемого сечения 0-Z через M_x, составим уравнения равновесия $\sum Y = 0$ и $\sum M = 0$ (так как силы R_A и P_1 перпендикулярны к оси Z, уравнение равновесия $\sum Z = 0$ обращается в тождество вида 0=0).

$$\sum Y = R_A - P_1 - Q_y = 0;\ \sum M = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a) - M_x = 0,$$

откуда $Q_y = R_A - P_1;\ M_x = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - a)$.

Таким образом, внутренние силы в рассматриваемом сечении оказались приведенными к силе Q_y и паре сил с моментом M_x.

Проекция равнодействующей внутренних сил в сечении на ось, перпендикулярную к оси балки, называется поперечной силой в рассматриваемом сечения и обозначается Q_y или Q..

Момент равнодействующей внутренних сил относительно центра тяжести рассматриваемого сечения называется изгибающим моментом и обозначается M_x или M.

Из равновесия правой части балки (рис. 25б) можно заключить, что поперечная сила Q_y изгибающий момент M_x в сечении будут иметь те же значения, что и для левой части, но направления их будут противоположны.

Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, действующих по одну сторону сечения на ось, перпендикулярную к оси балки.

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону сечения, относительно его центра тяжести.

Чтобы получить в одном и том же сечения балки один и тот же знак для по
перечной силы или изгибающего момента независимо от того, какая часть балки (левая или правая) рассматривается при вычислениях, приняты следующие правила знаков:

1) поперечная сила в любом сечении считается положительной, если равнодействующая левых внешних сил направлена снизу вверх, а правых - сверху вниз (рис. 26а). В противном случае, поперечная сила будет отрицательной (рис. 26б);

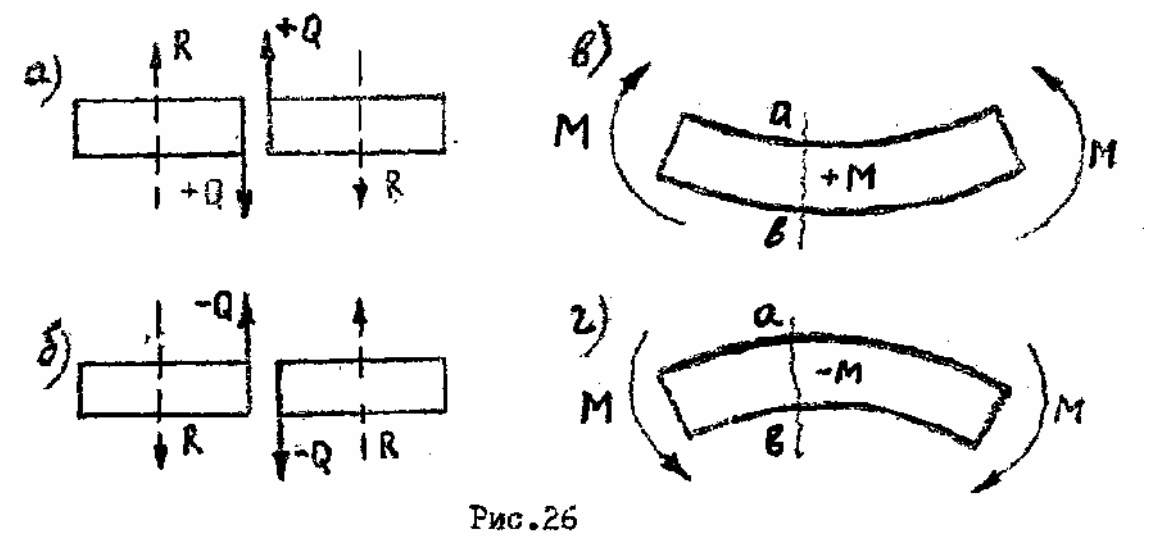


Рис.26

2) изгибающий момент в любом сечении балки, например, в сечении *а-в* (рис.26в) считается положительным, если результирующий момент от действия всех, левых внешних сил направлен по часовой стрелке, а от правых внешних сил - против часовой стрелки; в противном случае (рис. 26г), изгибающий момент считается отрицательным.

На основании рис. 26 можно получить наиболее простое правило знаков для изгибающих моментов, связанное с характером деформации балки, а именно: изгибающий момент положителен, если балка изгибается выпуклостью вниз; если же балка изгибается выпуклостью вверх, изгибающий момент отрицателен.

§ 19. Зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки (теорема Д. И. Журавского)

Если изгибаемая балка находится в равновесии, то и любой элемент, мысленно вырезанный из нее, должен также находиться в равновесии.

Предположим, что из балки АВ, находящейся под действием произвольной нагрузки, вырезан элемент бесконечно малой длины *dz* (рис. 27а). Нагрузку на этот элемент, вследствие бесконечно малой его длины, можно считать равномерно распределенной интенсивностью *q* (рис. 27б).

Действие левой части балки на элемент заменим поперечной силой *Q* и изгибающим моментом *M*. Так как на этот элемент действует только равномерно распределенная нагрузка, то на участке dz поперечная сила *Q* и изгибающий момент *M* являются непрерывными функциями от z. Следовательно, в сечении на расстоянии (z+dz) поперечная сила и изгибающий момент получат бесконечно малые приращения и будут соответственно равны: *(Q+dQ), (M+dM)*. Составим уравнение равновесия сил, действующих на элемент:

$$\sum Y = Q + q \cdot dz - (Q + dQ) = 0$$

откуда получим:

$$\frac{dQ}{dz} = q\,, \qquad (19.1)$$

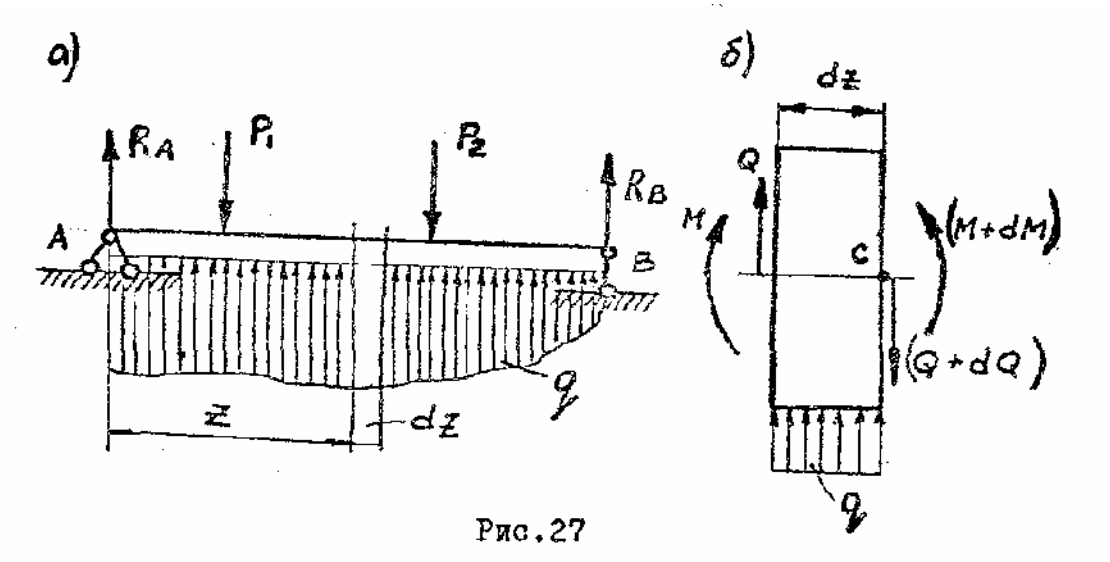


Рис.27

т.е. производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности сплошной нагрузки в том же сечении.

Теперь составим уравнение моментов всех сил относительно центра тяжести правого сечения элемента (точки С):

$$\sum M_C = M + Q \cdot dz + q \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - (M + dM) = 0$$

или $Q \cdot dz + q \cdot \frac{dz^2}{2} = dM$,

откуда, пренебрегая малой величиной второго порядка, получим:

$$\frac{dM}{dz} = Q , \qquad (19.2)$$

т.е. производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной сила в том же сечении.

Из предыдущих формул получаем зависимость:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q \qquad (19.3)$$

Полученные дифференциальные зависимости между изгибающим моментом *M*, поперечной силой *Q* и интенсивностью нагрузки *q*, называются теоремой Д. И. Журавского.

§ 20. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Графики, выражающие закон изменения поперечных сил или изгибающих моментов по длине балки, называются эпюрами Q или М.

Построение эпюр производится следующим образом: линию, параллельную оси балки, принимают за ось абсцисс, от которой в произвольном масштабе откладывают ординаты, соответствующие значениям Q или М, дейст-

вующим в различных сечениях балки. Соединяя концы отложенных ординат, получаем эпюру Q или M.

Ординаты, выражающие величины положительных поперечных сил, принято откладывать вверх от оси, а отрицательных - вниз. Ординаты, выражающие положительные изгибающие моменты, откладывают вверх, т.е. в сторону сжатого волокна балки.

Штриховать эпюры Q и M следует только вертикальными линиями, поскольку каждая линия штриховки в принятом масштабе выражает величину Q или M в данном сечении.

Построим эпюры *Q* и *M* для балки пролетом *l*, нагруженной сосредоточенной силой *P* (рис. 28).

Определим величины опорных реакций R_A и R_B:

$$\sum M_A = P \cdot a - R_B \cdot l = 0;\ R_B = \frac{P \cdot a}{l};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot l - P \cdot b = 0;\ R_A = \frac{P \cdot b}{l}.$$

Построение эпюры.

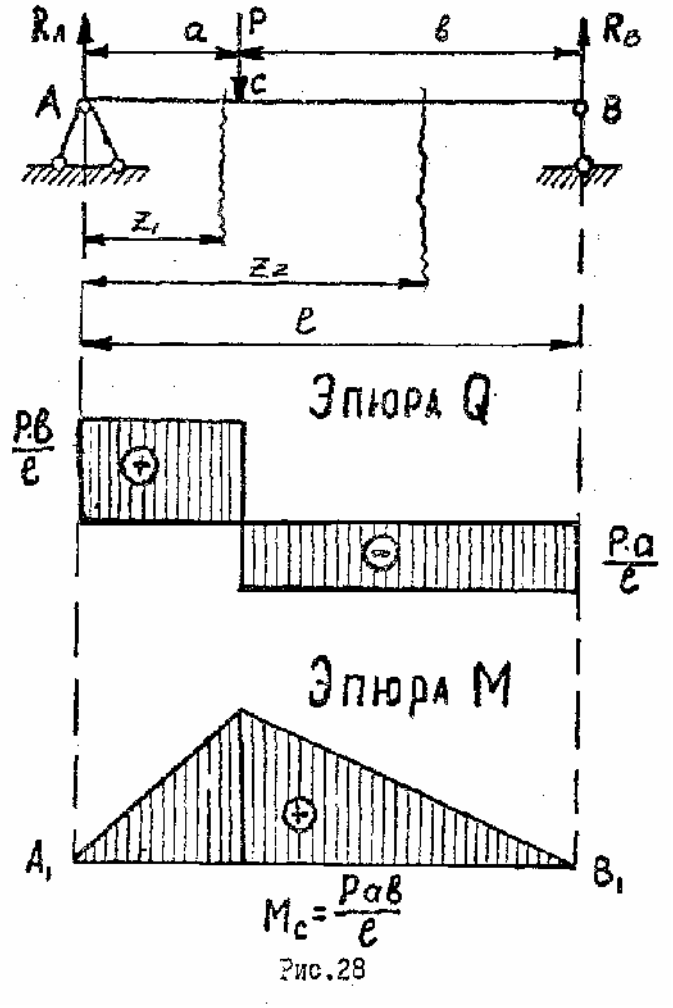


Рис.28

Возьмем сечение балки на расстоянии *z* от левой опоры и определим в нем поперечную силу *Q* и изгибающий момент M. Слева от сечения действует только одна сила - опорная реакция R_A. Следовательно, по определению поперечной силы проекция на вертикальную ось опорной реакции будет выражать поперечную силу Q в сечении, т.е.

$$Q_{z_1} = R_A = \frac{P \cdot b}{l}.$$

Опорная реакция R_A направлена вверх, следовательно, поперечная сила будет положительна, поэтому отложим ординату, выражающую ее величину в произвольном масштабе, вверх. Уравнение $Q_{z_1} = \frac{P \cdot b}{l}$ представляет собой уравнение прямой, параллельной оси абсцисс, следовательно, эпюра *Q* на левом участке будет иметь вид прямоугольника.

Для построения эпюры Q на втором участке балки возьмем произвольное сечение на расстоянии z_2 от левой опоры. Слева от этого сечения действуют две силы: опорная реакция R_A и сила P; справа - одна опорная реакция R_B. Для определения поперечной силы в сечении z_2 можно воспользоваться силами,
расположенными слева или справа от сечения. Покажем, что величина Q в обоих случаях будет одна и та те.

Поперечная сила в сечении Q от левых сил: $Q_{z_2} = R_A - P = R_B$, от правых сил: - $Q_{z_2} = -R_B$.

Эпюра поперечных сил в точке С имеет скачок, причем абсолютная величина скачка равна величине приложенной в этом сечении сосредоточенной силы P.

Построение эпюры М.

Составим выражение изгибающего момента в сечении z_1, который равен алгебраической сумме моментов всех левых или правых сил относительно этого сечения. По левую сторону z_1, действует только опорная реакция R_A, которая стремится вращать левую часть балки по движению часовой стрелки или изогнуть ее выпуклостью вниз (сжатые волокна сверху), следовательно, изгибающий момент M будет положительным:

$$M_z = R_A \cdot z_1 = \frac{P \cdot b}{l} \cdot z_1$$

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой линии, следовательно, изгибающий момент изменяется по закону прямой.

Величину z_1 можно брать в пределах от $z_1 = 0$ до $z_1 = a$:

при $z_1 = 0$ $\quad M_A = 0$;

при $z_1 = a$ $\quad M_C = R_A \cdot a = \frac{P \cdot b \cdot a}{l}$.

Откладывая полученное значение М в принятом масштабе вверх и соединяя конец ординаты прямой с точкой A_1, получим левую часть эпюры М.

Для построения правой части эпюры изгибающих моментов можно рассматривать левую или правую отсеченные части балки. В данном случае выражение изгибающего момента в сечении z_2 проще составить от правых сил, т.е. от одной опорной реакции R_B:

$$M_{Z_2} = R_B \cdot (l - z_2)$$

при $z_2 = a$ $\quad M_C = R_B \cdot (l - a) = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$;

при $z_2 = l$ $\quad M_B = R_B \cdot (l - l) = 0$

Соединив прямой линией конец ординаты с точкой B_1, где $M_B = 0$, получим правую часть эпюры М для балки. Как видно из эпюры М, по всей длине

балки изгибающий момент положителен и достигает наибольшего значения в точке С, т.е. под грузом Р.

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$$

В частном случае, когда сосредоточенный груз расположен в середине пролета балки, т.е. когда $a = b = \frac{l}{2}$, наибольшее значение изгибающего момента в сечении:

$$M_{\max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = \frac{P \cdot l/2 \cdot l/2}{l} = \frac{P \cdot l}{4}$$

§ 21. Нормальные напряжения при изгибе

Слой волокон *m-n*, расположенный в середине высоты балки (рис. 29а) не меняет своей длины (не растягивается и не сжимается), а только искривляется. Такой сдой называется нейтральным слоем.

Волокна, лежащие дальше от нейтрального слоя, удлиняются или укорачиваются больше, чем волокна, расположенные ближе к нему. А из этого, согласно закону Гука, следует, что величина напряжений по высоте поперечного сечения изменяется пропорционально удлинению волокон, т.е. напряжения нарастают с удалением от нейтрального слоя.

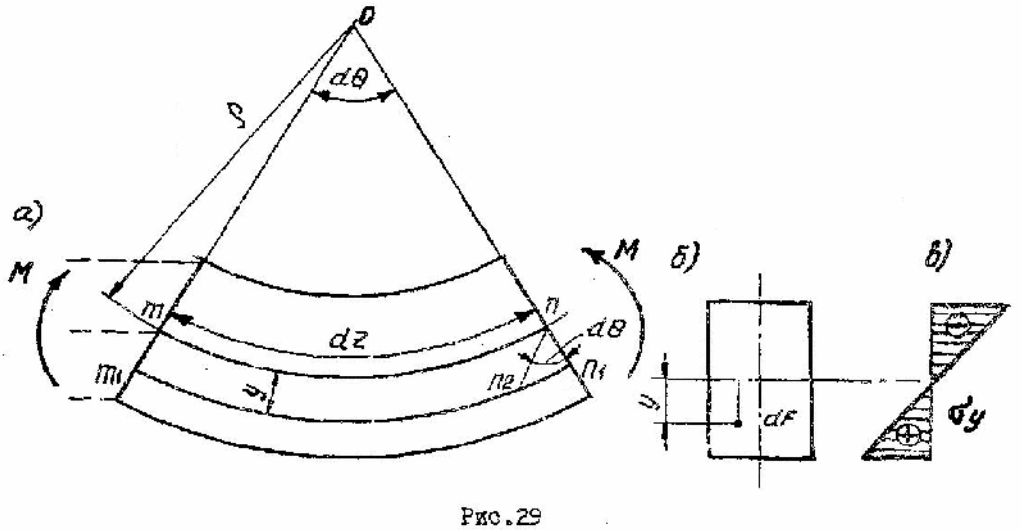


Рис.29

Следует заметить, что в данном случае нейтральный слой находится посередине высоты сечения потому, что балка имеет две оси симметрии. При другой форме поперечного сечения нейтральный слой может лежать ниже или выше середины сечения.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки называется нейтральной линией или осью. Она, как и нейтральный слой, проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна к плоскости симметрии балки, т.е. к плоскости действия сил.

Перейдем теперь к определению нормальных напряжений в поперечных сечениях балки при чистом изгибе.

Пусть к балке АВ приложены две равные сосредоточенные силы Р на одинаковом расстоянии от опор (рис. 30). Как видно из эпюры *Q*, средний участок балки CD испытывает деформацию чистого изгиба, так как поперечная сила во всех поперечных сечениях балки на этом участке равна нулю.

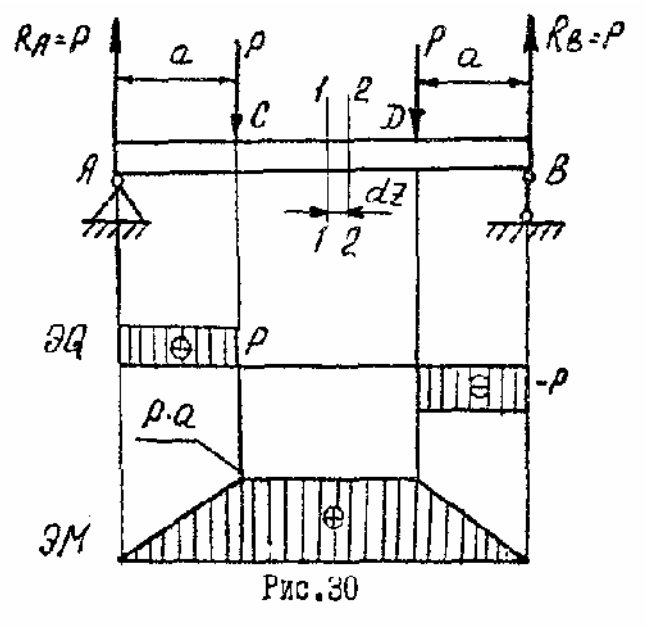


Рис.30

Двумя поперечными сечениями 1-1 и 2-2 вырежем из балки этого участка элемент длиной dz и представим его в более крупном масштабе (рис. 29а). После изгиба торцы балки несколько наклонятся, образуя угол dθ. Обозначим радиус кривизны изогнутой оси балки ρ, а длину одного из продольных волокон, лежащих в нейтральном слое, mn; так как эти волокна не изменяют своей длины при изгибе, можно написать:

$$mn = dz = \rho \cdot d\theta$$

Любое другое волокно выше или ниже нейтрального слоя изменит свою длину. Рассмотрим волокно m_1n_1, лежащее в растянутой зоне на расстоянии *y* от нейтрального слоя, и следовательно, удлиняющееся при изгибе.

Для определения величины удлинения его проведем через точку n линию, параллельную mm_1, до пересечения с волокном m_1n_1 в точке n_2. Тогда можно считать $m_1n_2 = mn$, а отрезок n_1n_2 будем принимать как абсолютное удлинение волокна m_1n_2 или, что то же самое, волокна mn. Отрезок n_1n_2 можно принять за дугу круга радиуса *y*, тогда абсолютное удлинение $n_1n_2 = y \cdot d\theta$, а относительное удлинение того же волокна m_1n_2 будет:

$$\varepsilon = \frac{n_1n_2}{mn} = \frac{y \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta}$$

или, сокращая на $d\theta$: $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, т.е. относительное удлинение волокна прямо пропорционально расстоянию от него до нейтральной линии (оси) балки.

Так как волокна балки при чистом изгибе испытывают только растяжение или сжатие, поэтому для определения нормального напряжения в рассматриваемом волокне можно воспользоваться законом Гука: $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Подставив сюда выражение $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$ относительного удлинения произвольного волокна балки, получим величину напряжения в нем:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{y}{\rho} \qquad (21.1)$$

т.е. нормальные напряжения изменяются прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси балки, а в точках, находящихся на самой нейтральной оси, они равны нулю.

Теперь получим закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки при чистом изгибе в зависимости от величины изгибающего момента.

Для этого выделим на поперечном сечении (рис. 29б) произвольную элементарную площадку *dF* на расстоянии *y* от нейтральной оси. Величина элементарной силы, которая возникает на площадке:

$$\sigma \cdot dF = \quad \cdot \frac{y}{\rho} \cdot \quad .$$

Теперь рассмотрим равновесие левой отсеченной части балки, заменив отброшенную часть силами, для чего напишем уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0 ; \sum M = 0$$

Уравнение равновесия $\sum Y = 0$ обращается в тождество вида 0=0. Сумма проекций всех элементарных сил на ось Z будет выражена интегралом, распространенным на всю площадь сечения, т.е.

$$\sum Z = \int_F \sigma \cdot dF = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y \cdot dF = 0$$

Величина модуля упругости *E* не равна нулю, а радиус кривизны ρ - величина конечная, т.е. $E \neq 0$; $\rho \neq 0$, следовательно:

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0 .$$

Полученный интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно нейтральной оси. Отсюда следует, что нейтральная ось проходит через центр тяжести поперечного сечения, потому что только в этом случае статический момент равен нулю.

Элементарная нормальная сила равна $\sigma \cdot dF$, ее момент относительно нейтральной оси $dM = \sigma \cdot dF \cdot y$. Чтобы определить полный момент, необходимо суммировать элементарные моменты, распространив сумму на всю площадь поперечного сечения балки, т.е.

$$M_x = \int_F \sigma \cdot dF \cdot y \,,$$

или, заменив σ равным ему выражением $\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}$, получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F y^2 \cdot dF \,.$$

В полученном выражении интеграл является моментом инерции сечения относительно нейтральной оси, т.е. $\int_F y^2 \cdot dF = I_x$.

Следовательно, можно написать: $\frac{E \cdot I_x}{\rho} = M$, или $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ (21.2)

где ρ - кривизна изогнутой оси балки; произведение $E \cdot I_x$ называется жесткостью сечении балки или жесткостью сечения при изгибе. Оно характеризует степень сопротивляемости балки искривлению оси при изгибе.

Полученное равенство (21.2) читается так: кривизна изогнутой оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жесткости сечения балки.

Подставив это выражение (21.2) в формулу (21.1) получим:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot E}{E \cdot I_x} \cdot y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

окончательно $$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \qquad (21.3)$$

Полученная формула справедлива для любой формы поперечного сечения, но при условии, если сечение имеет ось симметрии, в плоскости которой действуют изгибающие балку пары сил.

Формула (21.3) является уравнением прямой, следовательно, нормальные напряжения по высоте сечения изменяются по закону прямой. Наибольшие напряжения будут в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах.

Величина $\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x$ называется моментом сопротивления сечения и является геометрической характеристикой прочности поперечного сечения балки.

Подставив в последнее выражение вместо $\frac{I_x}{y_{\max}}$ величину момента сопротивления W_x получим окончательную формулу для σ_{max}:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \qquad (21.4)$$

Момент сопротивления измеряют в $м^3$, $см^3$.

Формула (21.6) выведена для случая чистого изгиба, при котором поперечные сечения балки остаются плоскими и после деформации. В случае поперечного изгиба сечения испытывают сдвиг, обусловленный наличием в них поперечной силы, и искривляются. Значит, в этом случае допущения, положенные в основу вывода формулы (21.3), окажутся несправедливыми. Однако, искривление сечений и надавливание волокон друг на друга настолько незначительны, что они не меняют существенно установленного выше закона распределения деформаций волокон. Поэтому формула (21.4) может быть применима и для случая плоского поперечного изгиба балки.

Выведем формулы моментов сопротивления для элементарных плоских сечений.

Прямоугольник со сторонами b и h (см. рис. 31а)

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{h/2} = \frac{b \cdot h^2}{6} \qquad (21.5)$$

$$W_y = \frac{I_x}{x_{\max}} = \frac{\frac{b^3 \cdot h}{12}}{b/2} = \frac{b^2 \cdot h}{6} \qquad (21.6)$$

Квадрат со стороной *a* (см. рис. 31б):

$$W_x = W_y = \frac{\frac{a^4}{12}}{a/2} = \frac{a^3}{6} \qquad (21.7)$$

Круг (см. рис. 31в):

$$W_x = W_y = \frac{I}{d/2} = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{d/2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0{,}1 \cdot d^3 \qquad (21.8)$$

Круговое кольцо (см. рис. 31г):

$$W_x = W_y = \frac{I}{D/2} = \frac{\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}}{D/2} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} \approx 0{,}1 \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} \qquad (21.9)$$

Если зададимся отношением диаметров $\frac{d}{D} = C$ или $d = C \cdot D$, то получим:

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - C^4)$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \quad ^4) \approx 0{,}1 \cdot \quad ^3 \cdot (1 - \quad ^4) \qquad (21.10)$$

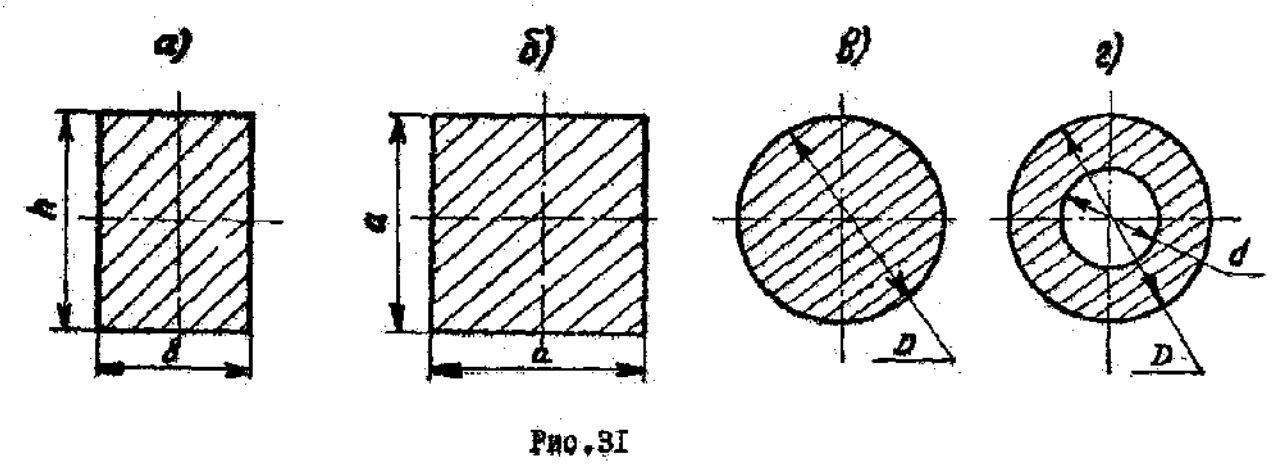


Рис. 31

§ 22. Касательные напряжения при изгибе

Касательные напряжения, при изгибе определяются по формуле:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x}{I_x \cdot b}, \qquad (22.1)$$

где: τ - касательное напряжение на площадке, параллельной, нейтральному слою и в поперечном сечении;
Q - поперечная сила в рассматриваемом сечении балки;
I_x - момент инерции относительно нейтральной оси всего поперечного сечения балки;
S_x - статический момент относительно нейтральной оси той части поперечного сечения, которая лежит вне или ниже рассматриваемой площадки;
b - ширина сечения на уровне площадки, по которой определяются касательные напряжения.

Формула (22.1) называется формулой Д. И. Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

§ 23. Определение касательных напряжений в балках прямоугольного сечения

Подставляя в формулу (22.1) значения S_x для различных значений y, можно установить закон изменения величины касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения (рис. 32).

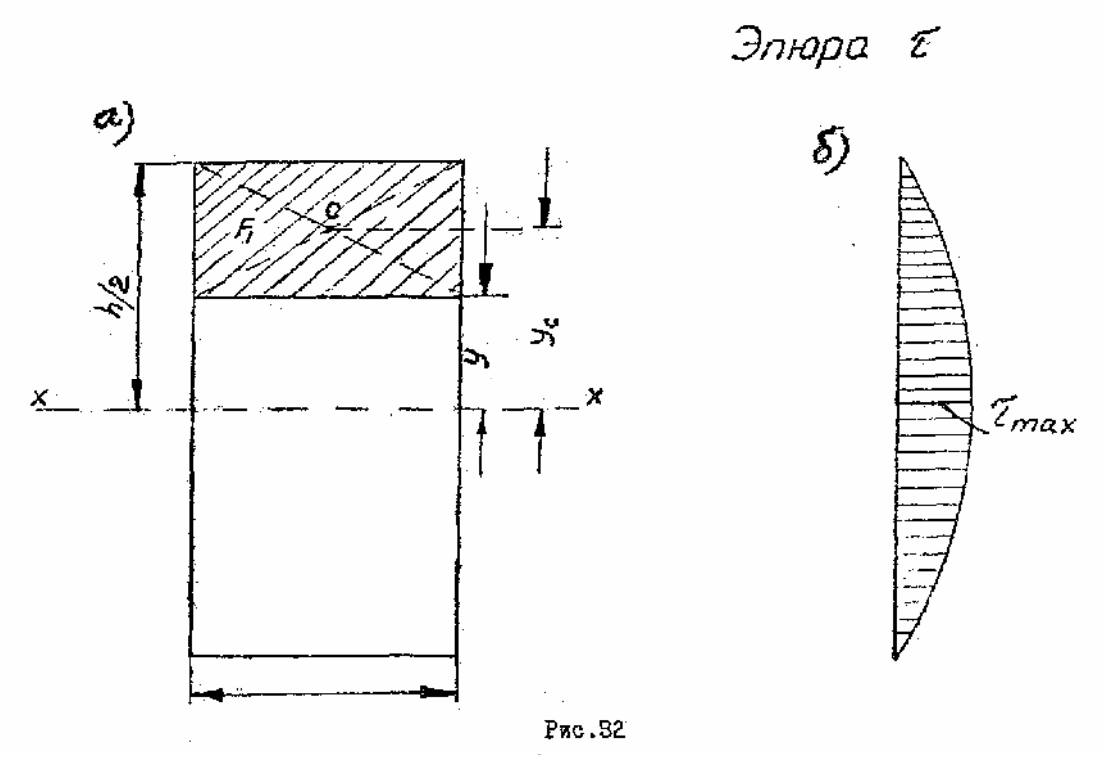


Рис.32

Для этого выделим на расстоянии *y* от нейтральной оси часть прямоугольного сечения высотой ($\frac{h}{2}-y$),площадь которого: $F=b\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)$,

а расстояние от центра тяжести этой площади до оси X:

$$y_C=\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}+y\right).$$

Статический момент этой части сечения относительно нейтральной оси:

$$S_x=F\cdot y_C=b\cdot\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h}{2}+y\right)=\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

Подставив значение S_x в формулу (22.1), получим:

$$\tau=\frac{Q}{I_x\cdot b}\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right).$$

Это - уравнение квадратичной параболы, из которого следует, что касательное напряжение τ имеет наибольшее значение в точках на нейтральной оси
(при y = 0):

$$\tau_{\max}=\frac{Q}{I_x\cdot l}\cdot\frac{b\cdot h^2}{8}.$$

Подставив вместо I_x выражение момента инерции для прямоугольного сечения $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$, получим:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot l} \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F},$$

где $F = b \cdot h$ или окончательно: $$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F} \qquad (23.1)$$

В крайних же верхних и нижних точках сечения, т.е. при $y = \pm \frac{h}{2}$, величина касательных напряжений равна нулю.

Эпюра касательных напряжений по высоте сечения показана на рис. 32б.

§ 24. Потенциальная энергия деформации при изгибе

Работа внешнего момента (пары сил), как известно из теоретической механики, равна произведению момента на соответствующий угол поворота. В данном же случае пара сил приложена статически, т.е. возрастает от нуля до конечного своего значения, следовательно, работу внешнего момента определяем как половину произведения величины момента на угол поворота сечения:

$$du = \frac{1}{2} \cdot M \cdot d\theta$$

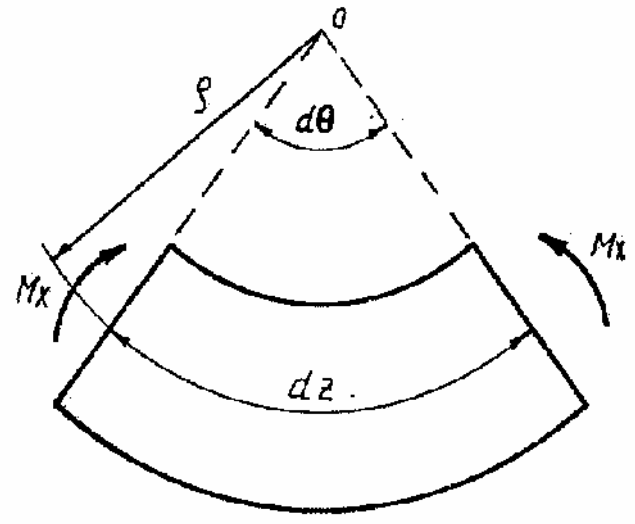


Рис. 33

Но из рис. 33 видно, что $d\theta = \frac{dz}{\rho}$, а так как согласно формуле $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$, то, следовательно: $d\theta = \frac{M_x \cdot dz}{E \cdot I_x}$ и

$$du = \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \cdot dz$$

Так как при чистом изгибе изгибающий момент - величина постоянная, то полная работа внутренних сил численно равна потенциальной энергии на участке длиной *l*:

$$u = \frac{M_x^2}{2 \cdot E \cdot I_x} \qquad (24.1)$$

При поперечном изгибе, как известно, в сечениях балки возникают еще поперечные силы, однако, ими можно пренебречь, так как они почти не влияют на работу, произведенную изгибающим моментом.

§ 25. Линейные и угловые перемещения при изгибе

Мы знаем, что при изгибе ось балки искривляется и, следовательно, точки, лежащие на ней, получают некоторые перемещения, которые, однако, настолько малы по сравнению с длиной балки, что направления их можно считать перпендикулярными первоначальному положению оси балки. Эти перемещения называются прогибами.

Кривая, в которую обращается первоначальная ось балки под действием внешних сил, называется изогнутой осью балки или упругой линией (рис. 34).

Прогибы в разных сечениях различны и зависят от расстояния z от принятого начала координат, например, совпадающего с точкой А, т.е. $y_z = f(z)$. При *z= 0, y = 0,* а при $z = \frac{l}{2}$ он достигает наибольшего своего значения, т.е. $y_{\max} = f$, где f – наибольший прогиб или стрела прогиба.

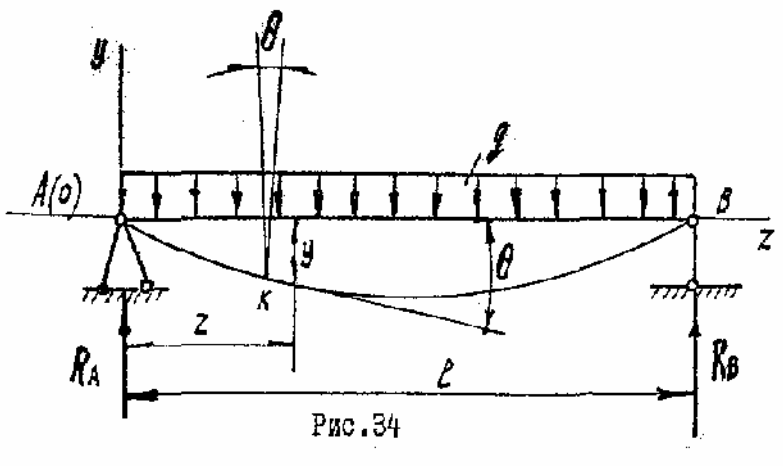


Рис.34

Оси координат условимся располагать следующим образом.

Начало координат примем на левом конце балки, ось *z* - направим вправо по оси балки, а ось *y* - вверх. Такое расположение осей координат даст возможность считать прогибы балки вниз отрицательными, а прогибы вверх – положительными.

Угол, составленный касательной к любой точке К изогнутой оси с первоначальным ее положением, условимся обозначить θ. На основании гипотезы плоских сечений, пренебрегая искривлением сечении балки при поперечном изгибе, будем считать, что поперечное сечение балки, проведенное через произвольную точку "К" первоначальной оси, поворачивается при изгибе балки на тот же угол θ. Следовательно, угол θ выражает угловое перемещение поперечного сечения балки при изгибе и называется углом поворота сечения балки. Он равен первой производной по z от прогиба в этом сечении, т.е.

$$\theta = y' = \frac{dy}{dz}$$

Для определения вида изогнутой оси балки необходимо составить ее уравнение, т.е. выразить ординаты (прогибы балки) в функции от положения точек по длине балки, другими словами, найти зависимость $y = f(z)$. Чтобы найти эту зависимость, используем равенство (21.2), полученное при выводе формулы нормальных напряжений при изгибе: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ и выражающее связь кривизны балки с изгибающим моментом и поперечной жесткостью сечения.

Формула кривизны, получаемая из дифференциальной геометрии, выражает ее связь с производными y' и y'' от ординат кривой.

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} \qquad (25.1)$$

Зависимость эту можно упростить, имея в виду, что прогибы балок очень малы по сравнению с длиной балки, а углы поворота также не составляют величины, большей 1°. В знаменатель же правой части этой формулы входит $(y')^2$ - тангенс угла наклона в квадрате, являющийся малой величиной по сравнению с 1, входящей в двучлен знаменателя, а поэтому ее отбрасывают, в результате чего формула принимает вид:

$$\frac{1}{\rho} \cong \pm y'' \cong \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (25.2)$$

т.е. кривизна балки приближенно равна второй производной от прогиба. Теперь формулу $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ можно представить так:

$$\pm y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}, \quad \text{или} \qquad E \cdot I_x \cdot y'' = M_x. \qquad (25.2)$$

Напомним из математики, что знак второй производной зависит от направления осей координат, а именно: она будет иметь положительное значение, если вогнутость кривой направлена в сторону положительной оси, и, наоборот, будет отрицательной, если в сторону положительной оси направлена выпуклость кривой (рис. 35).

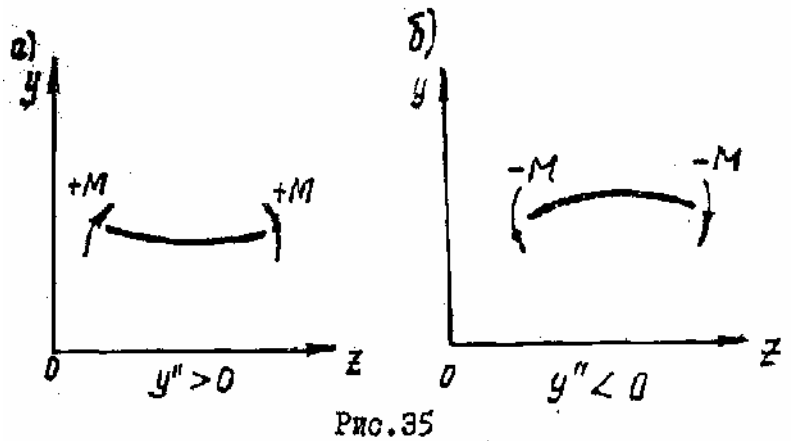


Рис.35

Изгибающий момент, как мы условились, в первом случае будет положителен, во втором - отрицателен. Таким образом, при направлении оси *y* вверх в уравнении $\pm y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x}$ нужно оставить знак "плюс", а при направлении оси вниз - знак "минус".

В дальнейшем будем направлять ось *y* всегда вверх, тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$y'' = \frac{M_x}{E \cdot I_x} \qquad (25.4)$$

Полученное уравнение (25.4) называется дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

Существует несколько методов решения этого уравнения.

Аналитический метод решения состоит в двукратном интегрировании дифференциального уравнения (25.4), в результате чего первое интегрирование дает уравнение углов поворота:

$$E \cdot I_x \cdot y' = \int M_x \cdot dz + C ,$$

а второе интегрирование - уравнение прогибов:

$$E \cdot I_x \cdot y = \int dz \int M_x \cdot dz + C \cdot z + D .$$

После каждого интегрирования получают постоянную интегрирования. Таким образом, для любого участка балки в результате двукратного интегрирования уравнения изогнутой оси получают две постоянные интегрирования. Следовательно, при наличии нескольких участков аналитический метод приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных постоянных интегрирования. Постоянные интегрирования определяют из условий закрепления балки (граничных условий), а также из условий на границах смежных участков. При этом: а) каждая неподвижная или подвижная опора дает одно условие - равенство нулю прогиба в сечении балки на опоре; б) от каждой жесткой заделки (защемления) можно получить два условия - равенстве нулю прогиба и угла поворота в сечении заделки; в) от каждой границы двух смежных участков получаем два условия - равенство между собой прогибов и углов поворота общих сечений на границе обоих участков.

§ 26. Интеграл Мора и способ Верещагина

Пусть требуется определить вертикальное перемещение точки "А" балки (рис. 36а). Обозначив действительное состояние балки Р, а фиктивное состояние ее - *i*, приложим к ней единственную внешнюю силу, равную, единице, по направлению искомого перемещения (рис. 36б).

Работа внешних сил равна произведению единичной силы на искомое перемещение: $A_{ip} = i \cdot y_A$

Работа внутренних сил: $U_{pi} = U_{ip} = \int_0^l \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz$

Но если деформации тела совершенно упругие, то работа внешних сил численно равна работе внутренних сил, т.е. $A_{ip} = U_{ip}$.

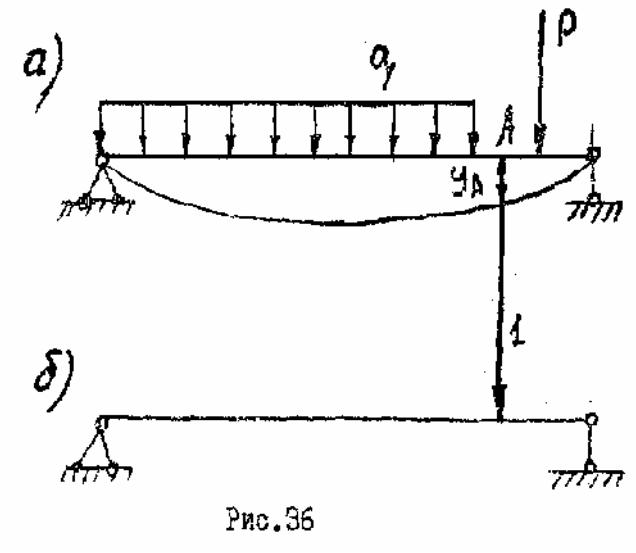


Рис.36

Следовательно:

$$y_A = \int_0^l \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz \qquad (26.1)$$

Формула (26.1) называется формулой (интегралом) Мора и позволяет определить перемещение любой линейно деформируемой системы (или балки) от любой нагрузки. Подинтегральное выражение в этой формуле следует считать положительным, если оба изгибающих момента входят в формулу с одинаковыми знаками или, что то же, эпюры их расположены по одну сторону оси балки.

Вычисление перемещений по формуле Мора весьма упрощается, если одна из эпюр прямолинейна, а жесткость балки постоянна. Тогда при определении перемещения интеграл Мора вычисляют графоаналитически по способу А.Н.Верещагина.

Основное преимущество этого способа состоит в том, что при его помощи можно обойтись без составления уравнения моментов и без интегрирования их произведений. Эти трудоемкие операции заменяются простейшими геометрическими вычислениями, заключающимися в "перемножении эпюр" изгибающих моментов от действительной и фиктивной (единичной) нагрузок.

Предположим, что на участке АВ балки постоянной жесткости (рис. 37) эпюра М прямолинейна и выражена уравнением $M_i = k \cdot z + b$, вторая же эпюра с произвольным очертанием $M_p(z)$.

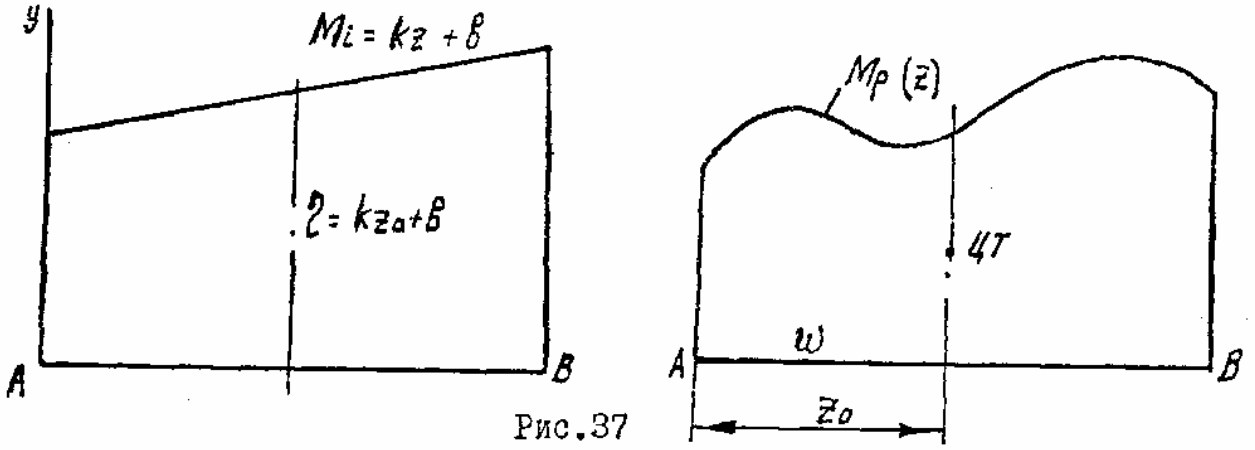


Рис.37

Подставив выражение М в интеграл Мора, получим:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \int_A^B M_p \cdot (k \cdot z + b) \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(k \cdot \int_A^B M_p \cdot z \cdot dz + b \cdot \int_A^B M_p \cdot dz \right)$$

Очевидно, что первый интеграл представляет собой статический момент площади ω относительно оси ординат, равный $\omega \cdot z_0$, а второй интеграл - площадь эпюры M_p в пределах от А до В, следовательно:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \int_A^B M_p \cdot (k \cdot \omega \cdot z + b \cdot \omega) = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega \cdot (k \cdot z_0 + b).$$

Но множитель $k \cdot z_0 + b = \eta$ - ордината прямолинейной эпюры M_i, находящаяся против центра тяжести площади. Поэтому окончательно имеем:

$$\int_A^B \frac{M_p \cdot M_i}{E \cdot I_x} \cdot dz = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \omega \cdot \eta, \qquad 26.2)$$

т.е. перемещение любой точки прямого бруса равно произведению площади эпюры M_p (произвольного очертания) на расположенную против ее центра тяжести ординату прямолинейной эпюры M_i, деленному на жесткость сечения балки.

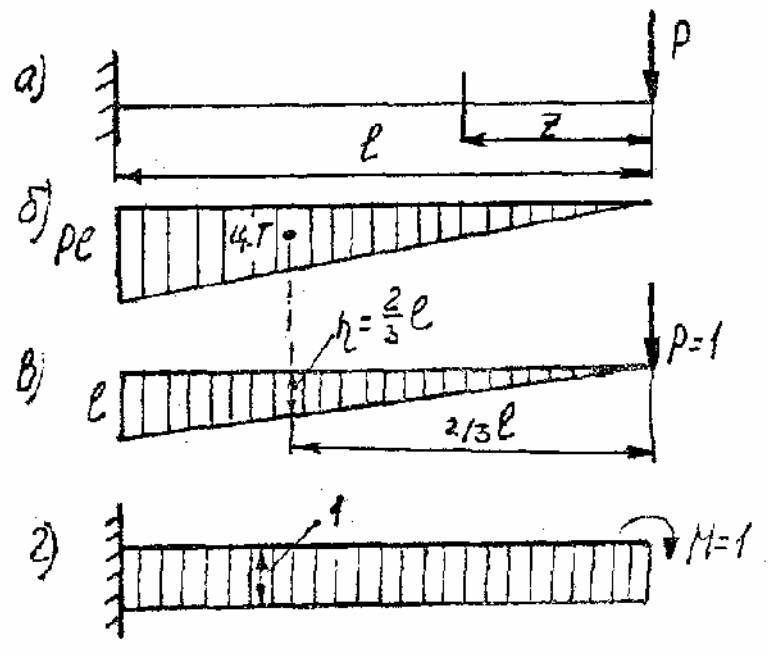


Рис.38

Следует иметь в виду, что ордината η берется только из прямолинейной эпюры.

Пример: определить вертикальное перемещение (прогиб) и угол поворота концевого сечения консольной балки постоянной жесткости (рис. 38а).

Решение: строим эпюру изгибающих моментов для действительного состояния балки (рис. 38б). Выбираем фиктивное состояние балки с единичной силой в точке приложения нагрузки и строим от нее эпюру изгибающих моментов (рис.38в). Определяем вертикальное перемещение по правилу Верещагина. Поскольку обе эпюры прямолинейны и их границы совпадают, площадь эпюры и ординату можно брать из любой эпюры.

Площадь грузовой эпюры: $\omega = \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2$

Центр тяжести этой эпюры находится в расстоянии $\frac{l}{3}$ от заделки.

Ордината эпюры моментов от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры равна $\frac{2}{3} \cdot l = \eta$, поэтому:

$$y = \frac{\omega \cdot \eta}{E \cdot I} = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot l = -\frac{p \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

Результат перемещения эпюр положителен, поскольку обе эпюры расположены по одну сторону от оси балки.

Величину угла поворота сечения определим, выбрав фиктивное состояние балки, при котором на ее конце действует сосредоточенная пара сил с моментом, равным единице, и строим для этого случая эпюру изгибающих моментов (рис. 38г).

Перемножая эпюру ω на эпюру от единичного момента, получим угол по
ворота концевого сечения консоли:

$$\theta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{1}{2} \cdot p \cdot l^2 \cdot 1 = -\frac{p \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

Так же, как и в первом случае, обе эпюры расположены по одну сторону оси балки, следовательно, результат перемножения эпюр положителен, т.е. концевое сечение балки поворачивается по направлению единичного момента.

§ 28. Сложное сопротивление. Косой изгиб

До сих пор были рассмотрены случаи, когда элементы конструкций, подверженные действию внешних сил, испытывали только одну из простых деформаций: осевое растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб и кручение. В действительности, во многих случаях элементы конструкций при работе испытывают одновременно не одну из перечисленных деформаций, а две или больше.

Например, валы машин испытывают одновременно деформации кручения и изгиба: колонны и столбы, нагруженные внецентренно, испытывают, кроме сжатия или растяжения, еще изгиб.

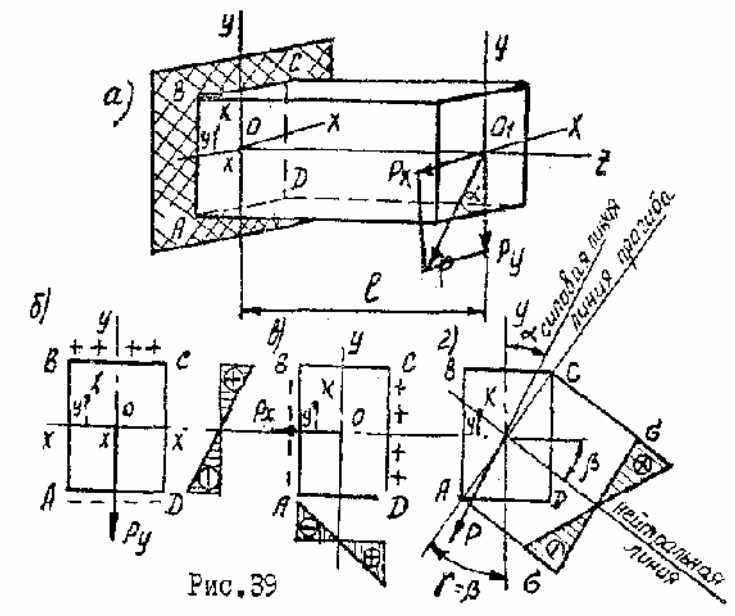
Элементы конструкций, испытывающие одновременно по две и более деформаций, находятся в состоянии сложного сопротивления.

Рассмотрим некоторые случаи сложного сопротивления, причем при определении напряжений и деформаций будем пользоваться принципом независимости действия сил. Одним из видов сложного сопротивления является косой изгиб. Случай изгиба, когда силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса, называется косым изгибом.

Из определения понятия косого изгиба следует, что брусья с круглым, квадратным, равносторонним шестиугольным, восьмиугольным и им подобным сечениями, у которых две любые взаимно перпендикулярные центральные оси являются главными, косого изгиба испытывать не будут.

На косой изгиб работают балки с несимметричным сечением. Рассмотрим деформацию косого изгиба на следующем примере. Пусть на консоль действует сосредоточенная нагрузка P, приложенная на свободном конце под углом α к главной плоскости *YOZ* (рис. 39а). Требуется определить наибольшие напряжения в поперечных сечениях бруса, его прогибы, а также положение нейтральной оси (нулевой линии) и построить эпюру нормальных напряжений.

Чтобы проверить прочность бруса при косом изгибе, нужно найти в опасном его сечении точку с наибольшим нормальным напряжением. Действующую под углом силу P разложим на две составляющие P_x и P_y по направлениям главных осей инерции 0,X и 0,Y.



Величины составляющих равны: $P_x = P \cdot Sin\alpha$; $P_y = P \cdot Cos\alpha$

Заменив силу P двумя составляющими, мы привели случай косого изгиба к двум прямым изгибам, вызываемым совместно силами P_x и P_y в двух главных плоскостях бруса.

Для определения напряжений в точках поперечных сечений бруса при его косом изгибе необходимо алгебраически суммировать напряжения, возникающие от сил P_x и P_y, т.е. от каждого прямого изгиба в отдельности. Перемещения (прогибы) поперечных сечений определяются геометрическим сложением их перемещений, происходящих в каждой из главных плоскостей.

Рассмотрим поочередно действие составляющих сил.

1. Сила P_y изгибает брус в плоскости главной оси инерции y, нейтральной осью сечения будет ось x (рис. 39б). От действия этой силы в сечениях бруса выше нейтральной оси будут возникать растягивающие напряжения, а ниже - сжимающие. В данном случае изгиб будет плоским и величина нормальных напряжений определяется по формуле: $\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$.

2. Сила P_x изгибает брус в плоскости другой главной оси инерции x; нейтральной осью сечения будет ось y (рис. 39в), знаками на сторонах AB и CD отмечен характер распределения напряжений: слева - сжатие, справа - растяжение. Нормальные напряжения для этого случая: $\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$.

В последних двух формулах $M_x = P_y \cdot l = p \cdot l \cdot Cos\alpha$ и $M_y = p \cdot l \cdot Sin\alpha$ представляют собой изгибающие моменты в опасном сечении балки, т.е. в плоскости заделки ABCD.

Для определения полного нормального напряжения σ от действия силы P алгебраически суммируем напряжения σ_x и σ_y:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \qquad (28.1)$$

где I_x, I_y - моменты инерции сечения относительно главных осей X, Y, множители x и y - координаты точки, для которой определяется напряжение.

Применяя формулу (28.1), следует руководствоваться ранее принятым правилом знаков для напряжения σ в произвольной точке сечения. В точках сечения, лежащих выше оси X, будут действовать растягивающие напряжения от действия M_x; значит, перед членом, содержащим M_x, надо поставить знак "плюс" (растянутая зона), а для точек сечения, лежащих ниже оси X - знак "минус" (сжатая зона). Для точек сечения, лежащих справа от оси У, перед членом, содержащим M_y, следует поставить знак "плюс" (растянутая зона), а для точек, лежащих слева от нее - знак "минус" (сжатая зона).

Нейтральная ось или нулевая линия, т.е. линия, на которой нормальные напряжения равны нулю, не будет совпадать ни с одной из осей X, У. Она не будет и перпендикулярной к плоскости действия нагрузки.

Определим положение нулевой линии, для чего выразим составляющие моменты M_x и M_y через результирующий момент M, действующий в силовой плоскости:

$$M_x = \quad \cdot \quad \alpha; \; M_y = \quad \cdot \quad \alpha.$$

Подставив значения M_x и M_y в формулу (28.1), получим:

$$\sigma = M \cdot \left(\frac{Cos\alpha}{I_x} \cdot y + \frac{Sin\alpha}{I_y} \cdot x \right).$$

Для составления уравнения нулевой линии необходимо приравнять это выражение нулю; причем слагаемые в скобках следует взять с обратными знаками, поскольку во 2 и 4-м квадрантах, где должна пройти нейтральная ось, координаты X и У имеют разные знаки (см. рис. 39г, точку К); следовательно, будем иметь:

$$M \cdot \left(\frac{Cos\alpha}{I_x} \cdot y - \frac{Sin\alpha}{I_y} \cdot x \right) = 0$$

Но так как изгибающий момент М = Р не может быть равным нулю, то остается принять равным нулю выражение в скобках, т.е.

$$\frac{Cos\alpha}{I_x} \cdot y - \frac{Sin\alpha}{I_y} \cdot x = 0$$

или $$\frac{y}{x} = \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha} \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

Обозначив через β угол наклона нулевой линии к оси X, получим:

$$\frac{y}{x} = tg\beta ,$$

после чего выражение для тангенса угла наклона нулевой линии к оси X примет вид:

$$tg\beta = tg\alpha \cdot \frac{I_x}{I_y} \qquad (28.2)$$

Как видно из формулы (28.2), углы α и β в общем случае не равны между собой, т.е. нулевая линия не перпендикулярна силовой линии, как это имело место в случае плоскою изгиба. Взаимная перпендикулярность их будет только в тех случаях, когда $I_x=I_y$, т.е. для квадратных, круглых и других сечений, удовлетворяющих условию равенства главных центральных моментов инерции сечения.

В результате вывода формулы (28.2) оказалось, что правая часть положительна, а это значит, что принятый нами отсчет угла по движению часовой стрелки оказался правильным, т.е. совпадает с направлением отсчета угла β, сделанного также по направлению движения часовой стрелки.

Теперь, пользуясь принципом независимости действия сил, определим перемещения при косом изгибе. Прогибы свободного конца балки от действия сил P_x и P_y могут быть определены любым из изложенных выше способов. Они получаются равными:

$$f_x = \frac{P_x \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y}; \qquad f_y = \frac{P_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_x},$$

причем, прогиб от действия силы P_x направлен по оси X, а прогиб от действия силы P_y - по оси Y. Полный прогиб конца балки выразится геометрической суммой обоих прогибов:

$$f = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}.$$

Направление полного прогиба определяется значением тангенса угла его наклона к оси Y:

$$tg\gamma = \frac{f_x}{f_y} = \frac{P_x \cdot I_x}{P_y \cdot I_y} = \frac{P \cdot I_x \cdot Sin\alpha}{P \cdot I_y \cdot Cos\alpha},$$

или

$$tg\gamma = \frac{I_x}{I_y} \cdot tg\alpha \qquad (28.3).$$

Сопоставляя формулы (28.2) и (28.3), находим, что правые их части равны, а значит, равны и их левые части, т.е.

$$tg\gamma = tg\beta \text{ или } \gamma = \beta$$

откуда следует, что полный прогиб направлен перпендикулярно к нулевой линии, т.е. прогиб балки происходит в плоскости, перпендикулярной кулевой линии.

Формулы (28.1), (28.2) и (28.3) были выведены на примере бруса прямоугольного сечения, но они действительны и для других сечений, у которых оси X и Y являются главным осями инерции. Наибольшие напряжения в брусьях, сечения которых имеют две оси симметрии и опасная точка максимально удалена от обеих главных осей (например, прямоугольник, двутавр), определяют по формуле:

$$\sigma_{\max} = \pm\frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \qquad (28.4)$$

Знаки перед каждым членом правей части формулы берут в зависимости от положения рассматриваемой точки в сечении. В нашем случае, например, для точки "C” (рис. 39г) надо взять плюс, а для точки "A" - минус.

Таким образом, расчетное уравнение на прочность при косом изгибе для балок с сечением указанных типов будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma] \qquad (28.5)$$

§ 29. Внецентренное сжатие (растяжение)

Когда сжимающая (растягивающая) сила или равнодействующая нескольких сил действует параллельно оси бруса, но точка приложения ее не совпадает с центром тяжести поперечного сечения бруса, то такое сжатие или растяжение называется внецентренным.

Рассмотрим сначала случай, когда линия действия сжимающей (растягивающей) силы находится в плоскости, проходящей через главную ось инерции сечения на некотором расстоянии от центра тяжести сечения (рис. 40).

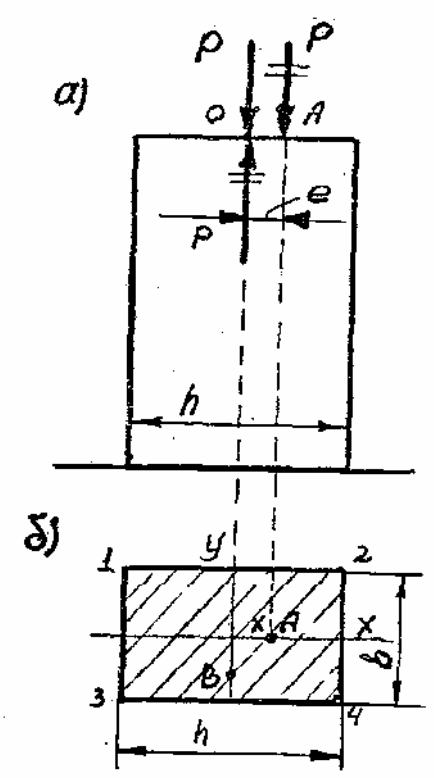


Рис. 40

Расстояние *l* точки приложения силы до центра тяжести сечения называется эксцентриситетом.

Пусть сила P приложена в точке A. Приведем силу P к центру тяжести сечения, для чего приложим в нем (точка 0) две силы, равные по величине силе P, но обратные по направлению. В результате этого теперь на брус будут действовать три силы: сила P, приложенная в центре тяжести сечения, и две силы P, составляющие пару с моментом $M = P \cdot l$ (перечеркнутые двумя черточками). Очевидно, что сила P, приложенная в центре сечения, будет равномерно сжимать брус, а момент пары будет его изгибать. Таким образом, случай внецентренного сжатия бруса мы свели к центральному сжатию и изгибу.

Применяя метод сечений, находим, что в любом поперечном сечении бруса возникает два внутренних силовых фактора: продольная сила $N = -$, изгибающий момент $M_y = P \cdot l$

Следовательно, в данном случае имеет место сочетание чистого прямого изгиба с центральным сжатием. Поскольку собственный вес бруса здесь не учитываем, значения внутренних силовых факторов будут одинаковы во всех поперечных сечениях.

Величина нормального напряжения, возникающего в любой точке поперечного сечения бруса, определяется как алгебраическая сумма двух напряжений: σ_N - от центрального сжатия и σ_M от прямого изгиба, т.е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M ,$$

или на основании формул:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \qquad (29.1)$$

При этом каждое из слагаемых подставляется в эту формулу со своим знаком по характеру деформации бруса, т.е. в данном случае формула будет иметь вид:

$$\sigma = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} \cdot x \qquad (29.2)$$

В случае приложения силы P в точке B:

$$\sigma = -\frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y \qquad (29.3)$$

Наибольшее напряжение в сечении:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M_y}{W_y} \qquad (29.4)$$

Для определения максимального значения напряжения (по грани 1-3) перед вторым членом правой части формулы следует поставить знак «плюс», тогда:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} \qquad (29.5)$$

а для определения минимального значения напряжения (по грани 2-4) – знак «минус», тогда:

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} \qquad (29.6)$$

Если сила P будет приложена в точке B (рис. 40б), т.е. по оси Y, то формулы (29.5) и (29.6) примут вид:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_x} \quad \text{(по грани 1-2)} \qquad (29.7)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_x} \quad \text{(по грани 3-4)} \qquad (29.8)$$

Приняв для прямоугольного сечения $F = b \cdot h$; $W = \frac{b \cdot h^2}{6}$ и сделав преобразования, придадим формуле (29.4) другой вид, более удобный для некоторых исследований:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = -\frac{N}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot l}{h}\right),$$

или окончательно:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = -\frac{N}{F} \cdot \left(1 \pm \frac{6 \cdot l}{h}\right) \qquad (29.9)$$

Результат исследования формулы (29.9), с точки зрения влияния величины эксцентриситета на знак и величину напряжения, можно свести к следующим трем положениям (см. рис. 41):

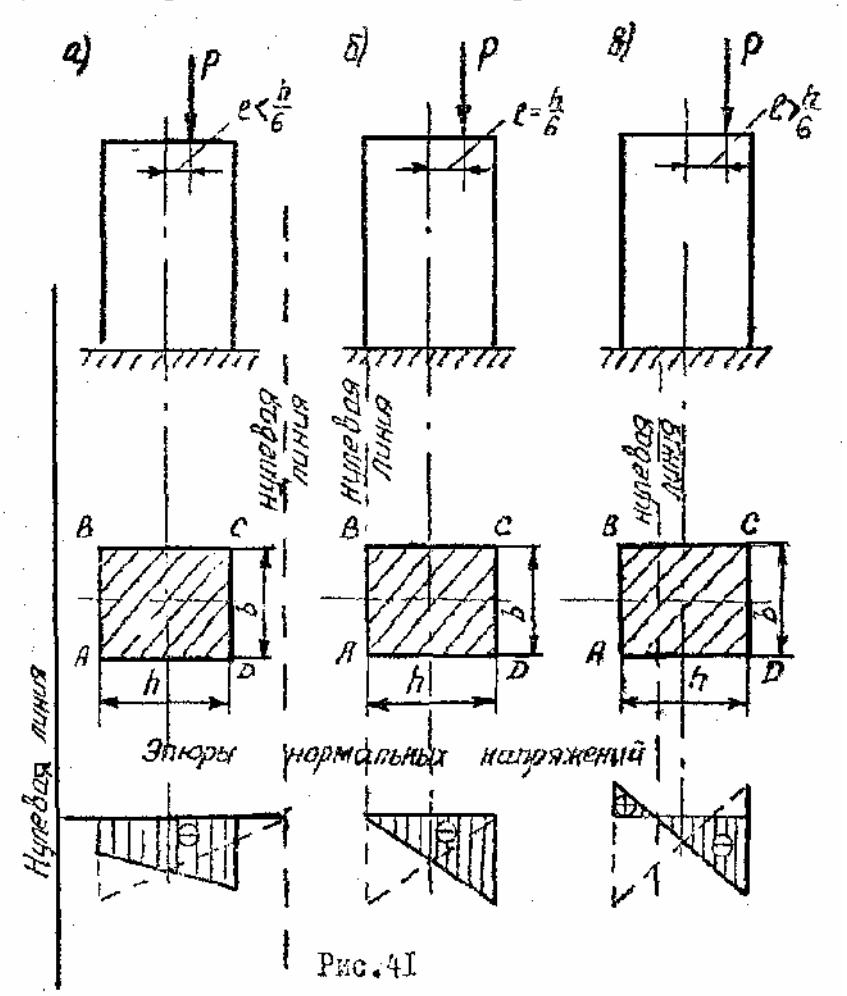


Рис.41

1) если точка приложения равнодействующей всех сил, приложенных к прямоугольному сечению бруса, не выходит из пределов средней трети сечения, т.е. эксцентриситет не превышает $\frac{h}{6}$, то напряжения в сечении будут одного знака, а нулевая линия проходит за пределами сечения. Область, из которой не выходит равнодействующая, называется ядром сечения;

2) если точка приложения равнодействующей лежит на грани средней трети сечения, то одно из краевых напряжений равно нулю, а другое - в два раза больше напряжения, возникающего при центральном сжатии: нулевая линия при этом проходит по грани сечения;

3) если точка приложения равнодействующей находится за пределами средней трети, то напряжение в сечении будут разных знаков, а нулевая линия пересекает сечение.

На рис. 41 точка приложения силы P дана справа от оси сечения; соответственно этому построены и эпюры нормальных напряжений; в случае расположения силы P слева от оси сечения соответственно изменится и эпюры нормальных напряжений, а также и положение нулевых линий (см. пунктир на рис.41).

Хрупкие материалы очень плохо сопротивляются растяжению, допускаемые их напряжения на растяжение $[\sigma]_p$ очень малы. Поэтому для них необходимо так подбирать их поперечные размеры, чтобы точка приложения равнодействующей не выходила за пределы средней трети сечения (ядра сечения), т.е. чтобы эпюра напряжений соответствовала эпюре по (рис. 4а) или, в крайнем случае, - эпюре по (рис. 41б).

§ 30. Кручение с изгибом

Рассмотрим случай одновременного кручения и изгиба вала (рис. 42).

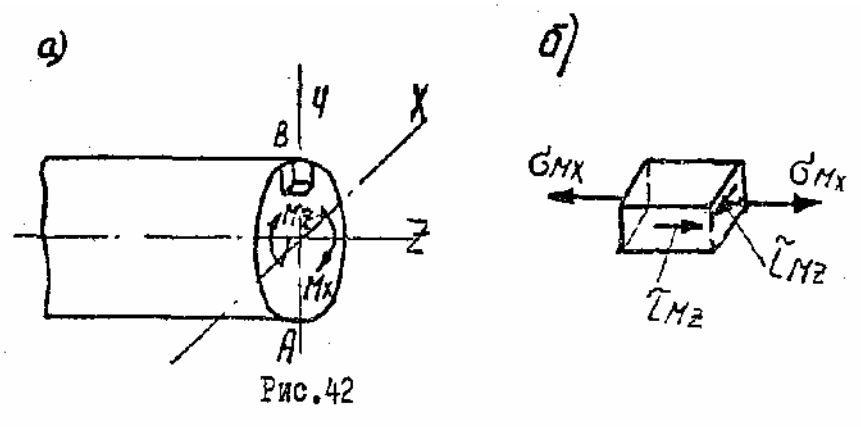


Рис.42

Применив метод сечений, найдем, что в поперечных сечениях вала одновременно возникают крутящий $M_к$ и изгибающий M_x моменты. Выделив из бруса около точки "В" элементарный кубик и рассмотрев его равновесие, найдем, что по четырем ею граням возникают касательные напряжения, а по двум из них - еще и нормальные напряжения (рис. 42б). Следовательно, кубик находится в плоском напряженном состоянии.

Таким образом, в каждой точке поперечного сечения бруса одновременно возникают:

1) максимальные нормальные напряжения от изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x};$$

2) касательные напряжения от изгиба, которыми ввиду их незначительности пренебрегаем;
3) касательное напряжение от кручения, достигающее наибольшего значения $\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_p}$ во всех точках контура круглого сечения и, в том числе, в двух точках А и В (опасные точки), в которых имеем максимальное значение. Приняв во внимание, что $W_p = 2 \cdot W_x$, можно написать:

$$\tau_{\max} = \frac{M_к}{W_p} = \frac{M_к}{2 \cdot W_x}$$

Любое из полученных напряжений ($\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$), взятое в отдельности, может оказаться меньшим соответствующего ему (по виду его деформации) допускаемого напряжения, но одновременно их действие может быть опасным для бруса.

Главные напряжения определяются согласно формуле (11.6):

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Подставив вместо σ и τ их значения, получим:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M_x}{W_x} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + \left(\frac{M_k}{2\cdot W_x}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M_x}{W_x} \pm \frac{1}{2\cdot W_x}\cdot\sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}$$

.

Вынеся за скобку $\frac{1}{2\cdot W_x}$, получим окончательную формулу для определения главных напряжений при кручении с изгибом:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2\cdot W_x}\cdot\left(M_x \pm \sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}\right). \qquad (30.1)$$

Теперь можно составить условия прочности бруса круглого сечения для наиболее напряженной его точки на основании третьей и энергетической теорий прочности.

1. По третьей теории прочности: $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$ пользуясь формулой (30.1), можно написать:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{2\cdot W_x}\cdot\left(M_x + \sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}\right) - \frac{1}{2\cdot W_x}\cdot\left(M_x - \sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}\right) \le [\sigma],$$

или $\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}}{W_x} = \frac{M_{расч}}{W_x} \le [\sigma],$ (30.2)

где $M_{расч} = \sqrt{M_x{}^2 + M_k{}^2}$.

2. По энергетической (четвертой) теории прочности:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\cdot\sigma_2} \le [\sigma]$$

произведя необходимые подстановки и преобразования, получим:

$$\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{M_x{}^2 + 0,75\cdot M_k{}^2}}{W_x} = \frac{M_{расч}}{W_x} \le [\sigma], \qquad (30.3)$$

где $M_{расч} = \sqrt{M_x{}^2 + 0,75\cdot M_k{}^2}$.

§ 31. Продольный изгиб

До сих пор определение размеров поперечных сечений стержней мы производили из условий прочности и жесткости. Но практика работы конструкций показывает, что разрушение сжатого стержня может произойти не только от нарушения его прочности, но и от потери приданной ему при изготовлении формы равновесия.

Для примера возьмем деревянную чертежную линейку и приложим к ней продольную сжимающую нагрузку. Постепенно увеличивая ее, заметим, что ось линейки сначала остается почти прямолинейной, а затем при некото-

рой нагрузке, изменяющейся в дальнейшем очень мало, будет весьма быстро расти прогиб, и линейка ломается. При этом оказывается, что если определились напряжение в поперечном сечении линейки, как при простом сжатии, только от сжимающей силы, то оно будет во много раз меньше предела прочности материала, из которого она была изготовлена. Отсюда следует, что причиной разрушения линейки является не нарушение условия прочности, а потеря приданной ей прямолинейной формы равновесия, т.е. потеря устойчивости, вызвавшая дополнительные напряжения от продольного изгиба.

Из изложенного становится очевидным, что для надежной работы конструкции, помимо прочности ее элементов, необходимо, чтобы они были устойчивы. Поэтому сжатые стержни, кроме проверки их на прочность должны быть проверены и на устойчивость.

Наибольшая сжимающая сила, до которой сохраняется устойчивость первоначальной формы равновесия стержня, называется критической силой и обозначается $P_к$.

Деформация стержня, выражающаяся в искривлении его под действием сжимающих сил, направленных вдоль его оси, называется продольным изгибом.

Напряжение в сечении сжатого стержня, вызываемое критической силой $P_к$, называется критическим напряжением и обозначается $\sigma_к$.

Следовательно:
$$\sigma_к = \frac{P_к}{F} \qquad (31.1)$$

Так как для сжатого стержня критические напряжения являются опасными, то для обеспечения устойчивости прямолинейной формы стержня, подверженного сжимающей силе P, следует добавить к условию прочности на сжатие еще условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} \le \left[\sigma_y\right], \qquad (31.2)$$

где $\left[\sigma_y\right]$ - допускаемое напряжение на устойчивость, равное критическому напряжению, деленному на коэффициент запаса устойчивости K_y, т.е.

$$\left[\sigma_y\right] = \frac{\sigma_k}{K_y} \qquad (31.3)$$

§ 32. Формула Л. Эйлера для определения величины критической силы. Влияние способа закрепления концов стержня на величину критической силы

При расчете стержней на продольный изгиб иногда требуется определить величину критической силы $P_к$ как наименьшую осевую сжимающую силу, при которой можно сохранить равновесие искривленного сжатого стержня. Впервые эта задача была решена Л. Эйлером:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{l^2} \qquad (32.1)$$

Полученное выражение называется формулой Л. Эйлера в случае сжатия стержня с шарнирно закрепленными концами.

Для других способов закрепления концов стержня формула изменится.

Формулы, определяющие величину критической силы для всех четырех случаев, можно объединить в одну:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} \qquad (32.2)$$

В этой формуле коэффициент μ называется коэффициентом приведения длины, который зависит от способа закрепления концов стержня и численно равен $\frac{1}{n}$, где n - число полуволн.

При шарнирном закреплении концов $\mu = 1$;

при одном свободном и другом защемленном концах $\mu = 2$;

при обоих защемленных концах $\mu = 0,5$;

при одном защемленное, и другом шарнирном концах $\mu = 0,7$.

Величина произведения коэффициента приведения длины на действительную длину стержня *l* называется приведенной или расчетной длиной стержня и обозначается $l_{расч}$, т.е. $l_{расч} = \mu \cdot l$.

§ 33. Критическое напряжение. Гибкость стержня. Пределы применимости формулы Л. Эйлера

Формула Ф. С. Ясинского. Допускаемое напряжение при продольном изгибе

Для определения величины критического напряжения $\sigma_к$ следует величину критической силы P, разделить на площадь поперечного сечения F, т.е.

$$\sigma_к = \frac{P_к}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F}.$$

На основании формул (13.14) и (13.15) можно написать: $I_{\min} = F \cdot i_{\min}^2$, тогда:

$$\sigma_к = \frac{P_к}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot F \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2}.$$

Перенеся величину $i_{\min}^2$ в знаменатель, получим:

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}\right)^2} \qquad (33.1)$$

Отношение расчетной (приведенной) длины стержня к наименьшему радиусу инерции называется гибкостью стержня и обозначается буквой λ, т.е.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} . \qquad (33.2)$$

Введя обозначение гибкости стержня в формулу (33.1), получим:

$$\sigma_к = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \qquad (33.3)$$

Поэтому, если $\sigma_к \le \sigma_{пр}$, формула Эйлера применима, если же $\sigma_к \ge \sigma_{пр}$, то неприменима. Очевидно, что границей применимости формулы Эйлера будет случай, когда $\sigma_к = \sigma_{пр}$. Для практических целей удобнее выразить пределы применимости формулы Эйлера через гибкость λ.

Заменим в формуле (33.3) $\sigma_к$ на $\sigma_{пр}$ (предел пропорциональности) $\sigma_{пр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$ откуда определится значение предельной гибкости стержня:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пр}}} .$$

Приняв для стали Ст.3 $\sigma_{пр}$ = 2000 кг/см^2 и $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см^2, получим:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \cong 100 ,$$

т.е. если гибкость стержня $\lambda \ge 100$, то формула Эйлера применима, если же $\lambda \le 100$, то неприменима.

Опыты показывают, что в тех случаях, когда критические напряжения получаются больше предела пропорциональности, то действительные критические силы оказываются на много меньше вычисленных по формуле Эйлера. Эта формула на практике оказалась применимой только для определенной категории стержней - гибких и длинных, т.е. с большой гибкостью λ. (Продольный изгиб в пределах упругих деформаций).

На основе опытных данных Ф. С. Ясинским была предложена эмпирическая формула для определения критического напряжения в сечениях стержней некоторых конструкционных материалов:

$$\sigma_к = A - B \cdot \lambda , \qquad (33.4)$$

где А и В - коэффициенты, определяемые опытным путем.

Для стали Ст.3 формула (33.4) имеет вид:

$$\sigma_к = 3100 - 11{,}4 \cdot \lambda \ \text{(кг/см}^2\text{)}. \qquad (33.5)$$

Определив величину критического напряжения, можно вычислить критическую силу по формуле:

$$P_к = \sigma_k \cdot F . \qquad (33.6)$$

Формула Ф. С. Ясинского пригодна не при всех значениях гибкости λ. На рис. 43 изображен график зависимости критического напряжения от гибкости для стали Ст.3.

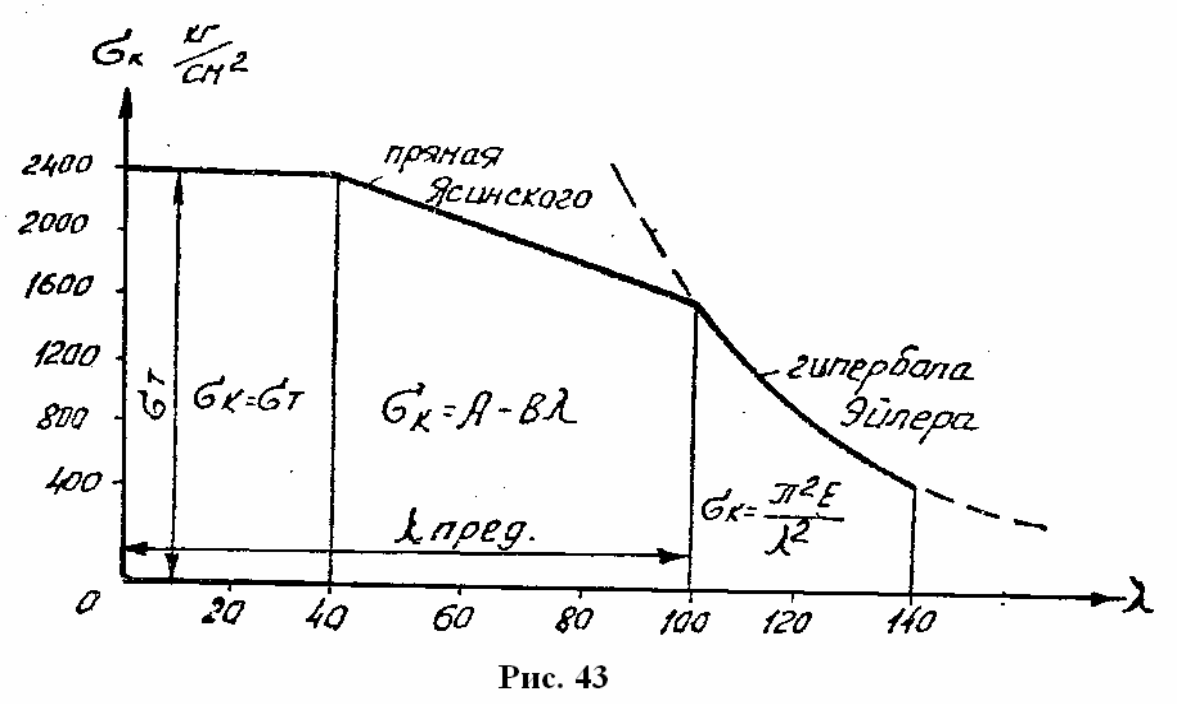


Рис. 43

Для гибкости от 0 до 40 критическое напряжение, примерно, постоянно; поэтому стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность при осевом сжатии. Стержни со средней гибкостью, находящейся в пределах $40 \le \lambda \le 100$, рассчитывают по формуле Ф. С. Ясинского, так как продольный изгиб наблюдается в пластической стадии.

Перейдем теперь к вопросу о допускаемом напряжении при продольном изгибе, которое можно определить при больших гибкостях ($\lambda \ge 100$) по формуле (33.3), а при средних гибкостях ($40 \le \lambda \le 100$) по формулам (33.4) и (33.5), разделив найденное по ним значение критической силы на коэффициент запаса K_y.

Коэффициент запаса устойчивости K_y принимают: для стали от 1,8 до 3; для дерева от 2,8 до 3,2.

Следовательно, для каждого значения гибкости λ, можно определить свое значение допускаемого напряжения при продольном изгибе:

$$\left[\sigma_y\right] = \frac{\sigma_k}{K_y} \qquad (33.7)$$

§ 34. Коэффициент уменьшения допускаемого напряжения на сжатие при продольном изгибе. Расчет сжатых стержней с помощью таблиц

Было установлено, что сжатые стержни должны быть проверены по двум условиям:

а) по условию прочности - $$\sigma = \frac{P}{F_{KT}} \le [\sigma], \qquad (34.1),$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{K}$ ($\sigma_{пред} = \sigma_T$ или $\sigma_{пред} = \sigma_в$);

б) по условию устойчивости - $$\sigma = \frac{P}{F_{бр}} \le [\sigma_y] = \frac{\sigma_к}{y} \qquad (34.2)$$

В предыдущем параграфе указывалось, что допускаемое напряжение на устойчивость не является постоянным для одного и того же материала, а зависит от гибкости стержня λ.

Выясним, как связаны допускаемые напряжения на устойчивость с допускаемыми напряжениями на прочность. Для этого составим их отношение:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_к \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}},$$

откуда $[\sigma_y] = \frac{\sigma_к \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}} \cdot [\sigma]$.

Обозначив выражение, стоящее в правой части равенства перед $[\sigma]$ через φ получим: $$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma],$$

где $$\varphi = \frac{\sigma_к \cdot K}{K_y \cdot \sigma_{пред}} \qquad (34.3)$$

Коэффициент φ называется коэффициентом уменьшения основного допускаемого напряжения $[\sigma]$ при продольном изгибе (коэффициентом продольного изгиба). Величина его всегда меньше единицы.

Теперь расчетную формулу на устойчивость можно представить в следующем виде:

$$\sigma = \frac{P}{F} \le \varphi \cdot [\sigma], \qquad (34.4)$$

где $[\sigma]$ - основное допускаемое напряжение при осевом сжатии.

Задачи на продольный изгиб можно разделить на три группы:

1. Определение допустимой нагрузки на стержень при известной длине, способе закрепления концов, площади поперечного сечения и вида материала.
2. Подбор сечения стержня по заданной длине, способе закрепления концов, вида материала и величине сжимающей силы.
3. Проверка на устойчивость продольно-сжатых стержней.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

ИЗГИБ