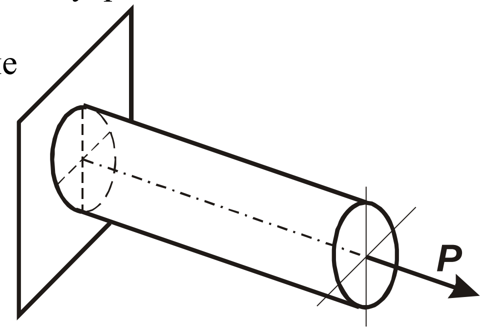
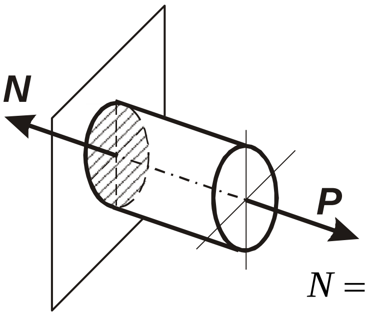
Растяжение-сжатие (задача №1)

В поперечных сечениях действуют:
внутренний силовой фактор – продольная сила *N (Н, кН, 1кН=1000Н)*,
нормальное напряжение σ *(Па, МПа, 1Па=1Н/м^2, 1МПа=10^6 Па),* напряжение – интенсивность внутренних сил:

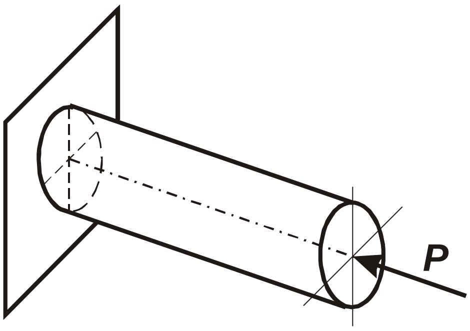
Растяжение

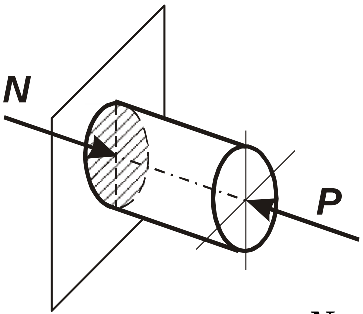




$N = +P$

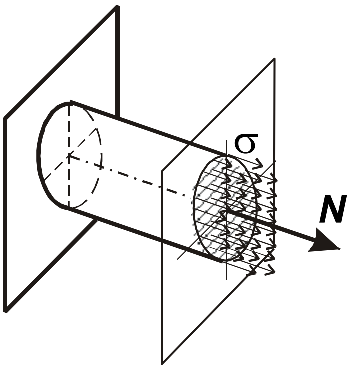
Сжатие

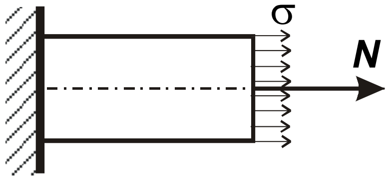




$N = -P$

Напряжения распределены по сечению равномерно, т.е. одинаковы во всех точках сечения

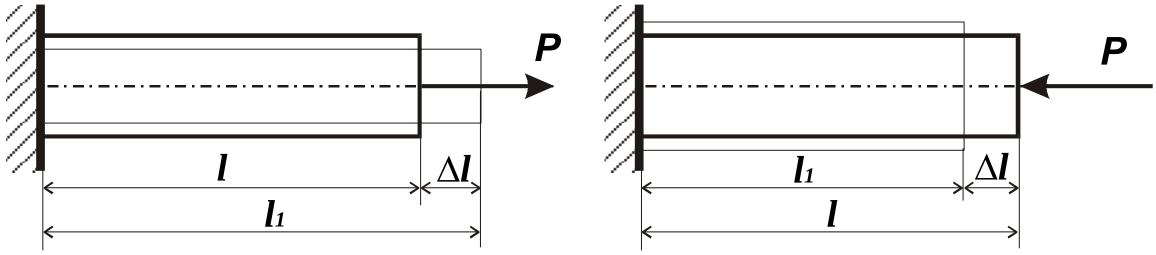




$$\boxed{\sigma = \frac{N}{F}}$$

F – площадь поперечного сечения.

Деформации при растяжении-сжатии:



Абсолютное удлинение Δl *(м);* относительное удлинение $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ (безразмерная величина).

Правило знаков: при растяжении продольная сила, нормальное напряжение и деформации положительны, при сжатии – отрицательны.

Закон Гука при растяжении-сжатии:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon,}$$

E – модуль Юнга (жесткость материала), для стали $E=2{\cdot}10^5$ *МПа.*
Условие прочности при растяжении-сжатии:

$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{N}{F} \le [\sigma],}$$

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение,

$$[\sigma] = \begin{cases} \dfrac{\sigma_т}{n}, \text{ для пластичных материалов;} \\ \dfrac{\sigma_в}{n}, \text{ для хрупких материалов;} \end{cases} \qquad n > 1 - \text{коэффициент запаса}.$$

$\sigma_т$ - предел текучести, $\sigma_в$ - предел прочности – механические характеристики.
Из условия прочности может быть определена необходимую площадь поперечного сечения (форма сечения может быть любой): $F \ge \dfrac{N}{[\sigma]}$

Определение механических характеристик. (лаб. №1)

Испытания на растяжение стального образца. Нагрузка увеличивается постепенно от нуля до значения, при котором происходит разрыв образца.

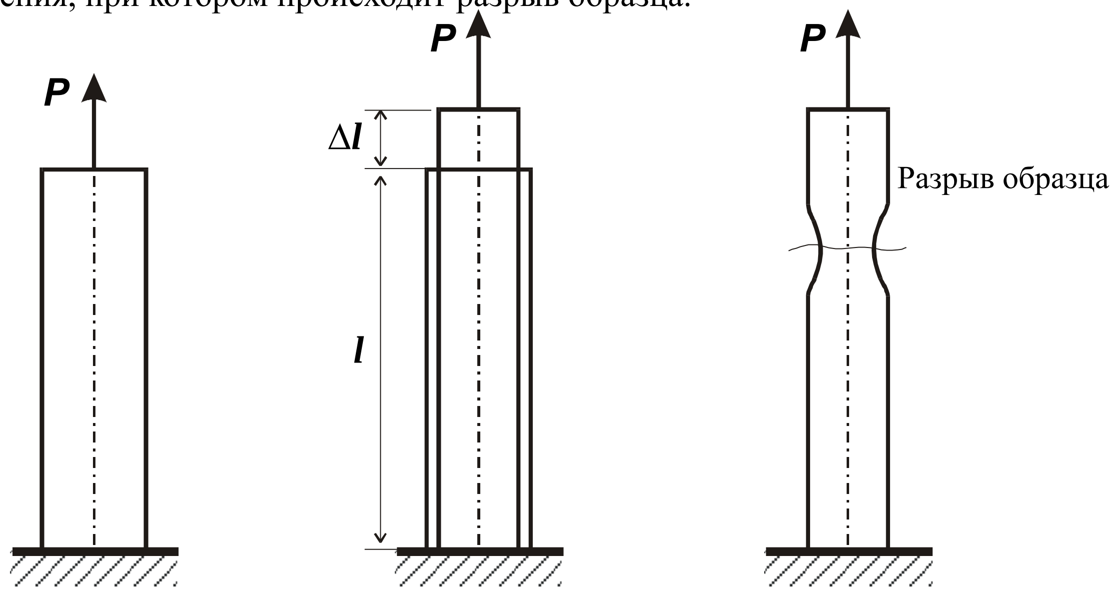
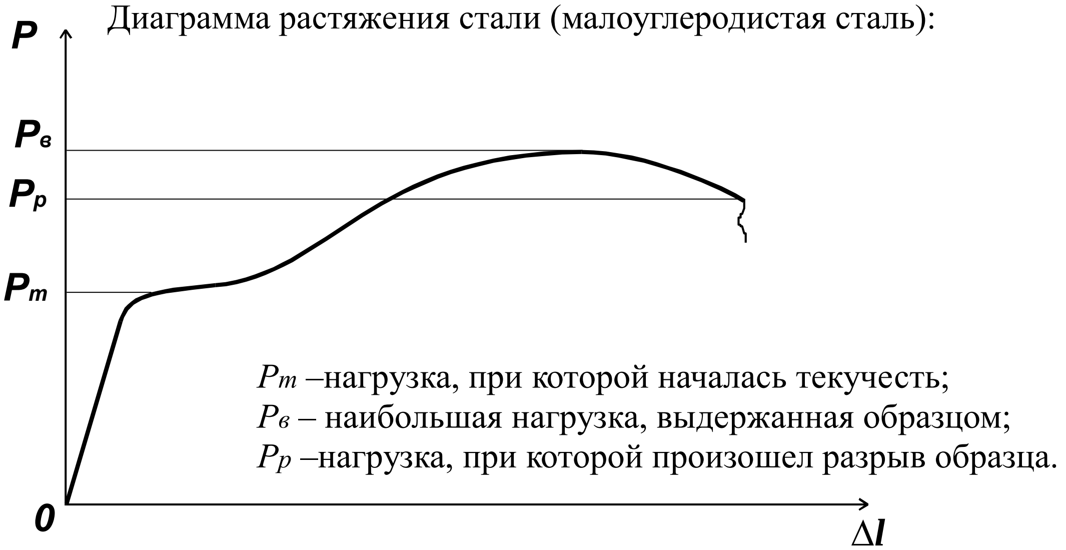
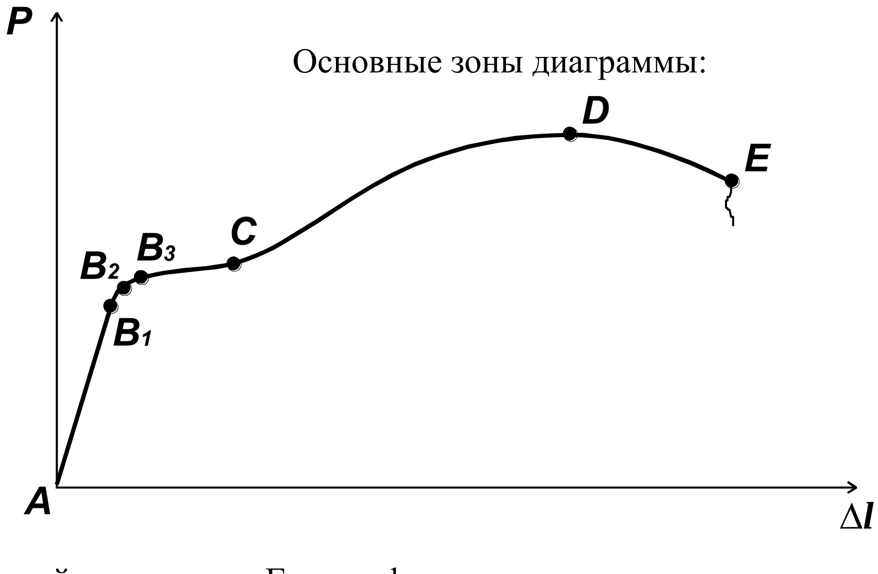


Диаграмма растяжения стали (малоуглеродистая сталь):



Основные зоны диаграммы:



AB_1 – зона действия закона Гука, деформации пропорциональны нагрузке;

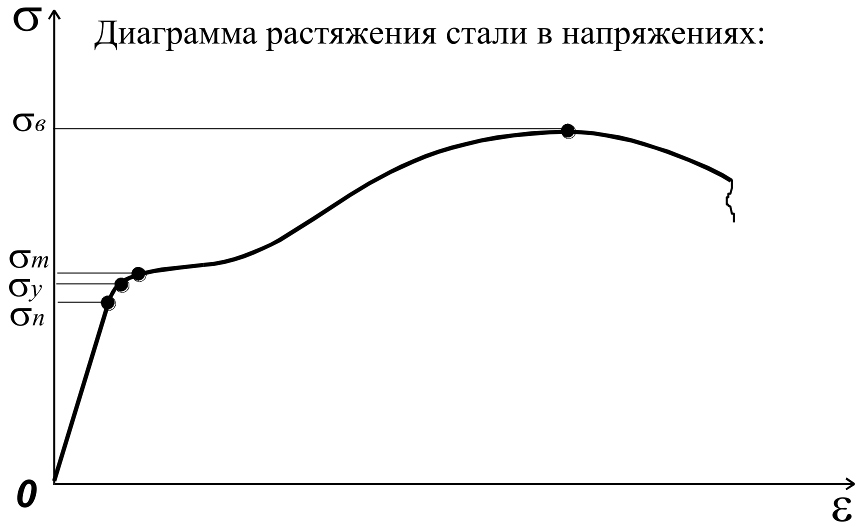
AB_2 – зона упругости, в материале нарастают упругие деформации, пластические деформации пренебрежимо малы;

B_3C – зона общей текучести, в материале при постоянной нагрузке по всему объему нарастают пластические деформации;
CD – зона упрочнения, в материале нарастают как пластические, так и упругие деформации, причем для удлинения образца требуется увеличение нагрузки;
DE – зона разрушения или зона местной текучести, материал течет вблизи ослабленного сечения, происходит образование шейки - местного сужения образца, затем происходит разрыв по месту образования шейки.

Диаграмма растяжения стали в напряжениях:

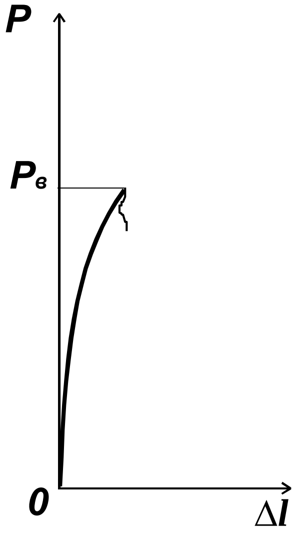
$$\sigma = \frac{N}{F}$$

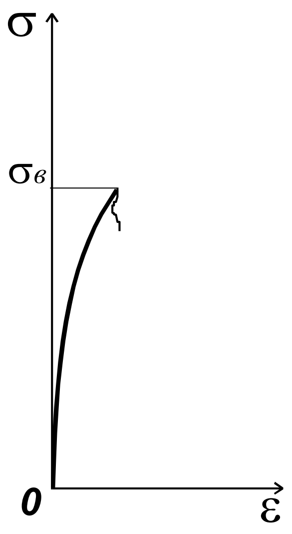
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$



Механические характеристики материала:
$\sigma_п$ - <u>предел пропорциональности</u>, наивысшее напряжение, при котором выполняется закон Гука $\sigma = E\varepsilon$;
$\sigma_у$ - <u>предел упругости</u>, наивысшее напряжение, при котором в материале нарастают только упругие деформации, пластические деформации пренебрежимо малы;
$\sigma_т$ - <u>предел текучести</u>, напряжение, при котором материал начинает течь, т.е. происходит рост пластических деформаций при постоянной нагрузке;
$\sigma_в$ - <u>предел прочности</u>, напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, которую материал выдержал до разрушения.

Диаграмма растяжения чугуна (хрупкого материала):

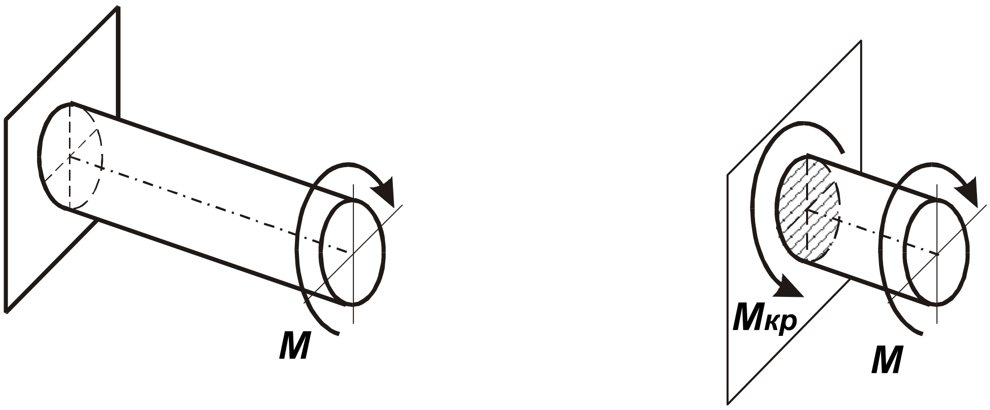




Разрушение происходит в зоне упругих деформаций, явление текучести отсутствует, единственная механическая характеристика – предел прочности $\sigma_в$.

Кручение (задача №5)

В поперечных сечениях действуют:
внутренний силовой фактор – крутящий момент *M (Н·м, кН·м)*,
касательное напряжение τ *(Па, МПа)*, вектор касательного напряжения лежит в плоскости поперечного сечения:

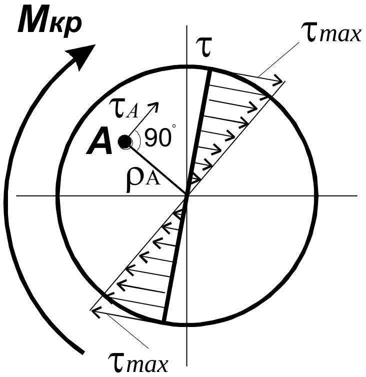


$$M_{кр} = M$$

Напряжения в каждой точке сечения перпендикулярны радиусу проведенному в эту точку и пропорциональны расстоянию от точки до центра сечения. Наибольшие напряжения на поверхности скручиваемого стержня.

$$\boxed{\tau = \frac{M}{J_p}\rho}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{M}{W_p}}$$

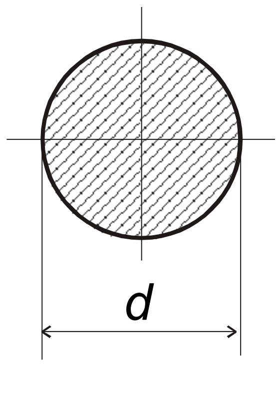


ρ – радиус-вектор точки сечения, в которой определяется напряжение,
J_p, W_p – геометрические характеристики сечения.

Геометрические характеристики круглого сечения,
используемые в расчетах на кручение

Полярный момент инерции сечения:

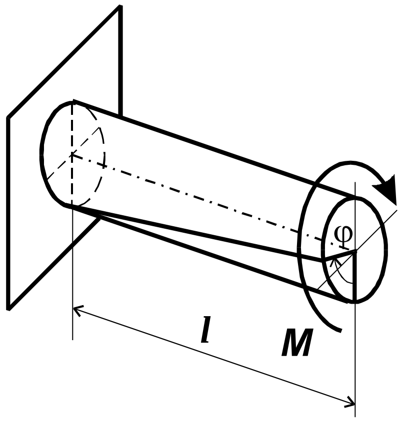
$$\boxed{J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1 d^4,} \ (м^4).$$



Полярный момент сопротивления сечения:

$$\boxed{W_p = \frac{J_p}{0{,}5d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2 d^3}, \ (м^3).$$

Деформации при кручении:



Угол закручивания φ *(рад)* – угол, на который повернется рассматриваемое сечение относительно неподвижного

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_p};$$

относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \text{ (рад/м)}.$$

Закон Гука при кручении:

$$\boxed{\tau = G\rho\theta\ ,}$$

G – модуль сдвига, для стали $G=8 \cdot 10^4$ *МПа.*

Условие прочности при кручении:

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \le [\tau],}$$

допускаемое касательное напряжение $[\tau] \approx (0{,}5 \div 0{,}6)[\sigma]$.

Из условия прочности можно определить радиус круглого сечения: $d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0{,}2[\tau]}}$

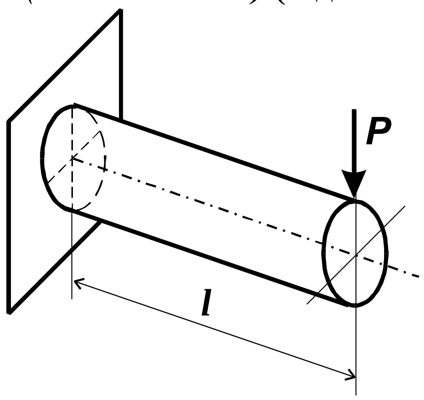
Условие жесткости при кручении:

$$\boxed{\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_p} \le [\theta],}$$

допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] \approx 0{,}05\ рад/м$.

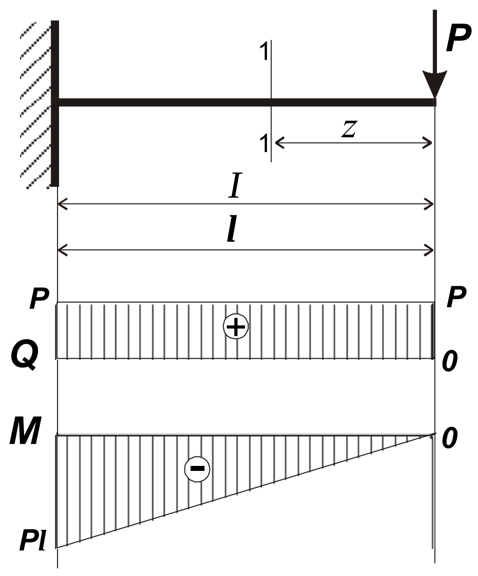
Из условия жесткости можно определить радиус круглого сечения: $d \ge \sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{0{,}1G[\theta]}}$

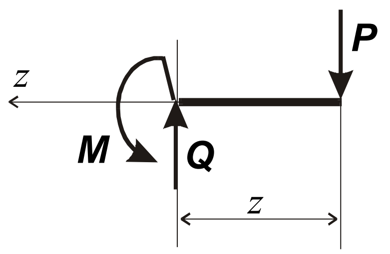
Изгиб *(плоский изгиб)* (задача №8а,б)



В поперечных сечениях действуют:
внутренние силовые факторы – <u>поперечная сила</u> *Q (Н, кН)*; <u>изгибающий момент</u> *M (Н·м, кН·м)*,
<u>нормальное напряжение</u> σ от действия момента, <u>касательное напряжение</u> τ от действия поперечной силы (как правило $\tau << \sigma$):
Консольная балка (один участок нагружения):

Рассмотрим равновесие отсеченной части балки





$$0 \le z \le l$$

$$\begin{cases} Q_I = +P = const; \\ M_I = -P \cdot z; \end{cases}$$

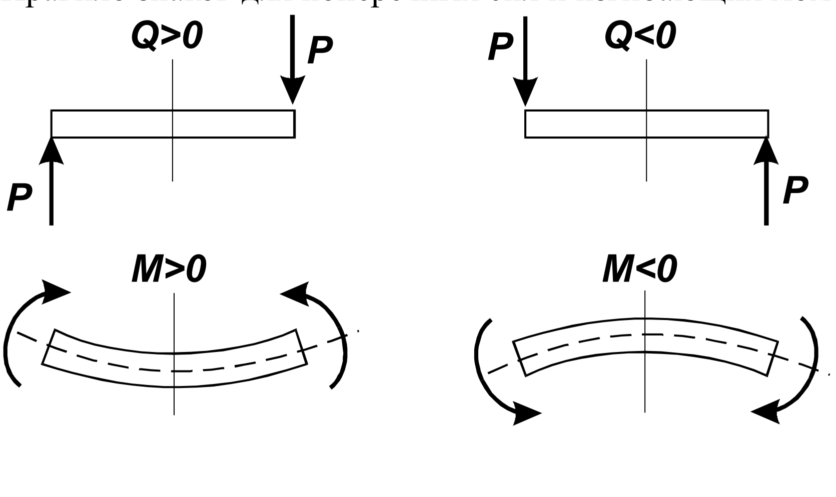
на границах участка нагружения:

$$Q_{I(z=0)} = +P; \qquad Q_{I(z=l)} = +P$$

$$M_{I(z=0)} = 0; \qquad M_{I(z=l)} = -Pl$$

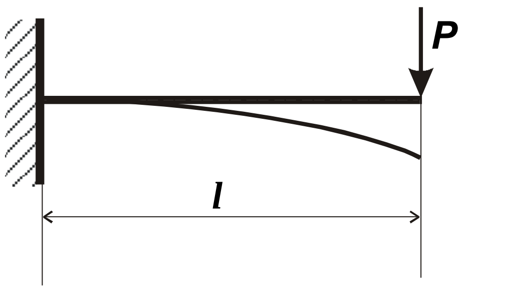
Опасное сечение - в заделке, где момент наибольший по абсолютной величине.

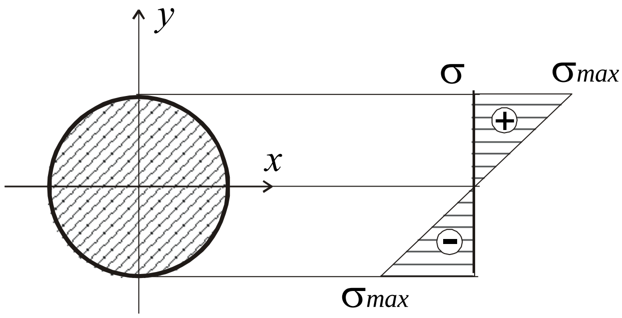
Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов:



Поперечная сила в сечении положительна, если внешние нагрузки вращают отсеченную часть балки по часовой стрелке.
Изгибающий момент в сечении положителен, если внешние нагрузки стремятся сжать верхние волокна балки.

Нормальные напряжения по высоте поперечного сечения балки изменяются по линейному закону, на верхней и нижней границах сечения напряжения максимальны (правило знаков – при растяжении продольных волокон балки напряжения положительны, при сжатии – отрицательны), ось x – нейтральная ось сечения, на ней напряжения равны нулю:



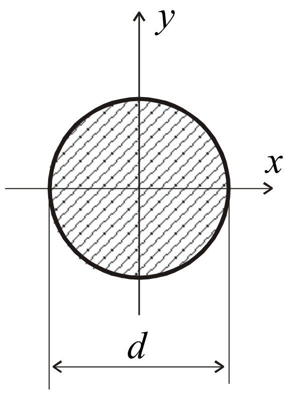


$$\boxed{\sigma = \frac{M}{J_x}\cdot y\,;} \qquad \boxed{\sigma_{max} = \frac{M}{W_x}}$$

J_x, W_x – геометрические характеристики сечения

Геометрические характеристики сечений, используемые в расчетах на изгиб

Круглое сечение



Осевой момент инерции сечения:

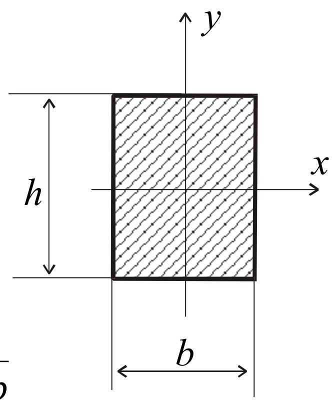
$$\boxed{J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0{,}05\,d^4,} \quad (м^4).$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{0{,}5d}; \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{0{,}5d}$$

$$\boxed{W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0{,}1d^4,} \quad (м^3).$$

Прямоугольное сечение



Осевой момент инерции сечения:

$$\boxed{J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12},} \quad (м^4).$$

Осевой момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{0{,}5h}; \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{J_y}{0{,}5b}$$

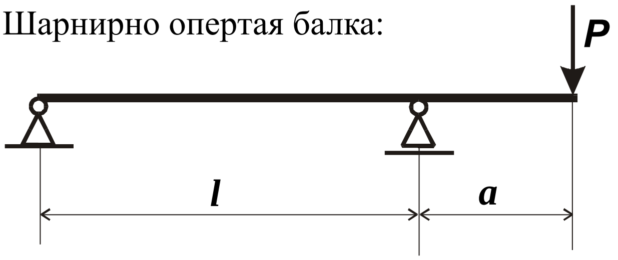
$$\boxed{W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6},} \quad (м^3).$$

Условие прочности при изгибе:

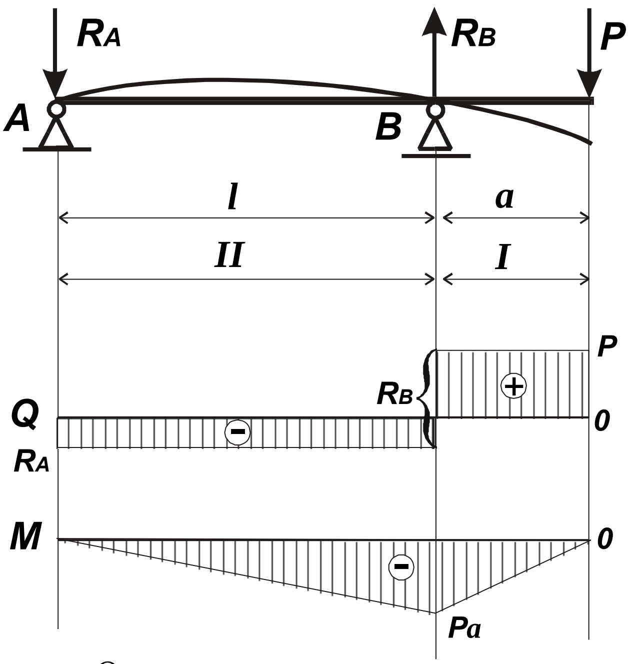
$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_x} \le [\sigma],}$$

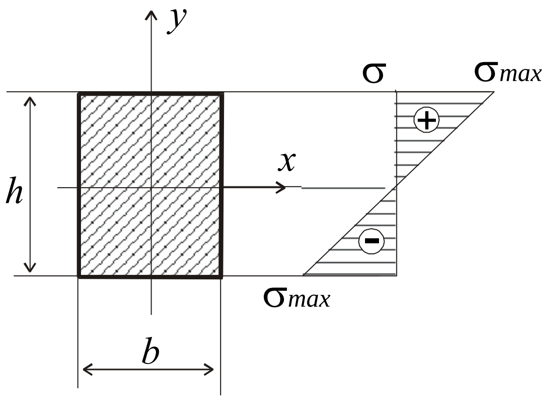
$[\sigma]$ - допускаемое напряжение, выбирается так же, как при растяжении-сжатии.

Шарнирно опертая балка:



Построим эпюры внутренних силовых факторов и подберем прямоугольное сечение.





Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot l + P \cdot a = 0; \qquad R_A = \dfrac{P \cdot a}{l}; \\ -R_B \cdot l + P \cdot (l + a) = 0; \qquad R_B = \dfrac{P \cdot (l+a)}{l}; \end{cases}$$

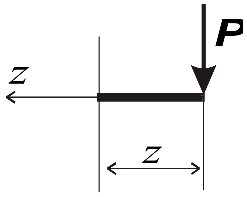
проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -R_A + R_B - P = 0;$$

$$-\frac{P \cdot a}{l} + \frac{P \cdot (l+a)}{l} - P = P - P = 0 \qquad \textit{проверка сошлась}$$

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le a$ (справа)



$Q_1 = +P$

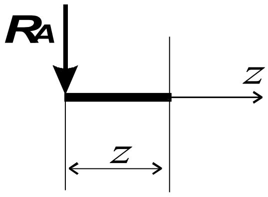
$M_1 = -Pz$

Тогда на границах участка

$Q_{1(z=0)} = +P$ $\qquad Q_{1(z=a)} = +P$

$M_{1(z=0)} = 0$ $\qquad M_{1(z=a)} = -Pa$

II участок: $0 \le z \le l$ (слева)



$Q_2 = -R_A$

$M_2 = -R_A z$

Тогда на границах участка

$Q_{2(z=0)} = -\dfrac{Pa}{l}$ $\qquad Q_{2(z=l)} = -\dfrac{Pa}{l}$

$M_{2(z=0)} = 0$ $\qquad M_{2(z=l)} = -Pa$

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее значение, $M_{max} = -Pa$.

Так как в опасном сечении момент отрицательный, верхние волокна растянуты, нижние - сжаты.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \le [\sigma],$$

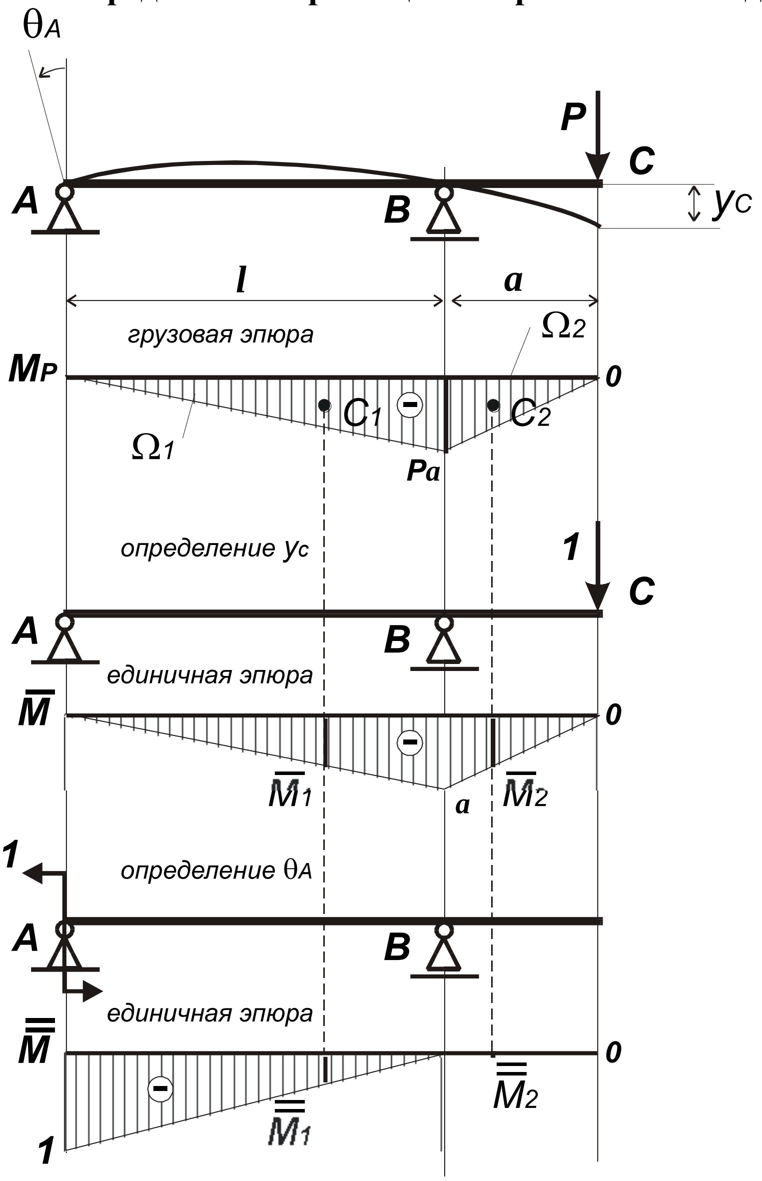
$$\Rightarrow \quad W_x \ge \frac{|M_{max}|}{[\sigma]}$$

Подберем прямоугольное сечение, пусть *h=2b, P=1 кН, a=0,2 м, [σ]=100 МПа*, тогда

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3}b^3;$$

$$b \ge \sqrt[3]{\frac{3|M_{max}|}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3Pa}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 1{,}442 \cdot 10^{-2}\ м = 1{,}442\ см.$$

Определение перемещений при изгибе методом Верещагина (задача №10)



Определим прогиб в сечении C y_C

1. Строим эпюру от внешней нагрузки (*грузовая эпюра*).
2. Строим эпюру от безразмерной единичной силы, приложенной в сечении C (*единичная эпюра*). Направление единичной силы – предположительное направление вертикального перемещения сечения.
3. Перемножаем эпюры (площади грузовой эпюры Ω_i умножаем на ординаты единичной $\overline{M}_i$ под центрами тяжести грузовой C_i)

$$y_C = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{M} \times M_P\right) = $$

$$= \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_1 \overline{M}_1 + \Omega_2 \overline{M}_2\right);$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2} Pa\,a, \qquad \overline{M}_1 = -\frac{2}{3} a$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2} Pa\,2a, \qquad \overline{M}_2 = -\frac{2}{3} a$$

$$y_C = \frac{Pa^3}{EJ_X}.$$

Определим угол поворота сечения A θ_A

1. Строим эпюру от внешней нагрузки (*грузовая эпюра*).
2. Строим эпюру от безразмерного единичного момента, приложенного в сечении A (*единичная эпюра*). Направление единичного момента – предположительное направление поворота сечения.
3. Перемножаем эпюры (площади грузовой эпюры Ω_i умножаем на ординаты единичной $\overline{\overline{M}}_i$ под центрами тяжести грузовой C_i)

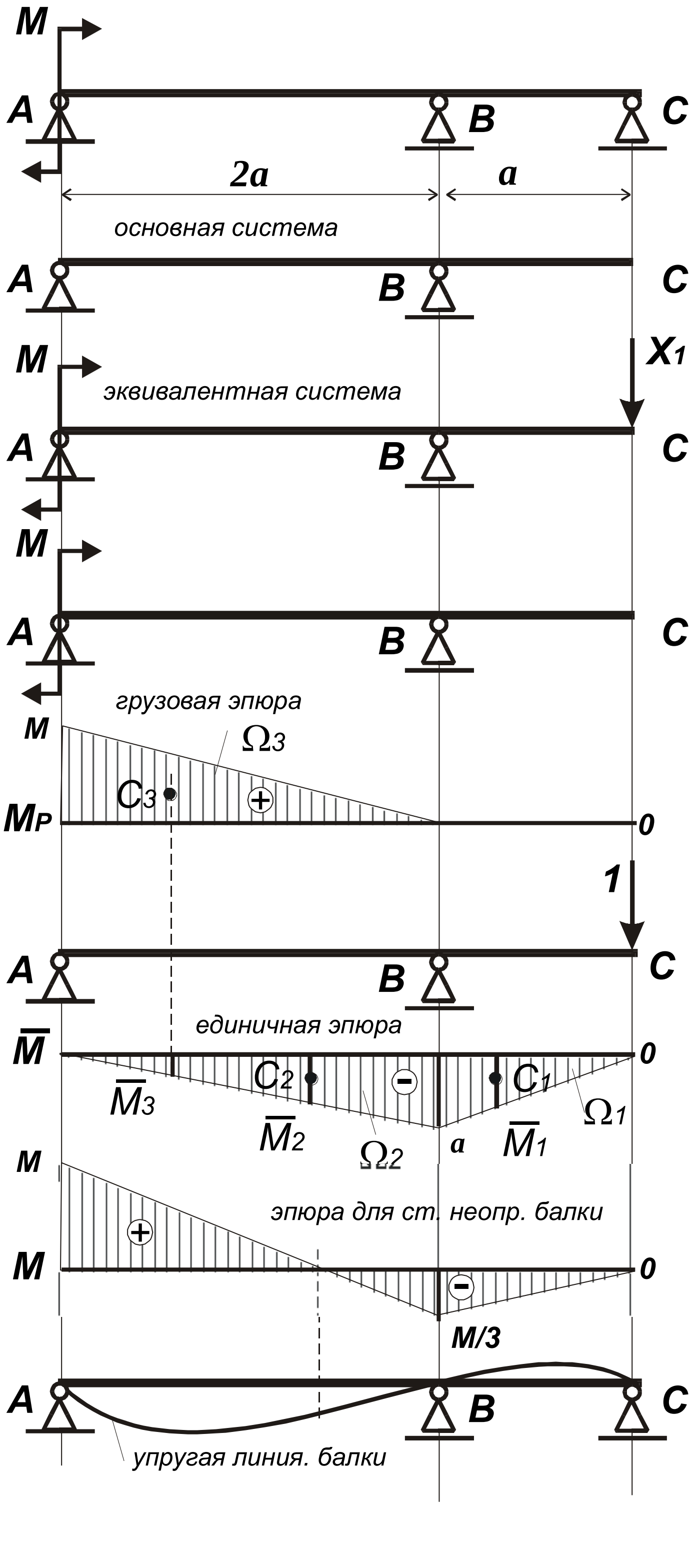
$$\theta_C = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{\overline{M}} \times M_P\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_1 \overline{\overline{M}}_1 + \Omega_2 \overline{\overline{M}}_2\right);$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2} Pa\,a, \qquad \overline{\overline{M}}_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2} Pa\,2a, \qquad \overline{\overline{M}}_2 = 0$$

$$\theta_A = \frac{Pa^2}{6EJ_X}$$

Расчет статически неопределимых балок методом сил (задача №10)



1. Выбираем основную систему, отбрасывая лишнюю связь (шарнир в сечении *C*).

2. Строим эквивалентную систему, прикладывая внешние нагрузки и неизвестную реакцию отброшенной связи X_1 *(реакцию в шарнирной опоре)*. Условие эквивалентности – перемещение (прогиб) по месту отброшенной связи должно быть равно нулю: $y_C = 0$.

3. Записываем условие эквивалентности в виде канонического уравнения метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad .$$

δ_{11} - прогиб в сечении *C*, вызванный единичной силой, приложенной в сечении *C* в направлении X_1 .

Δ_{1P} - прогиб в сечении C от действия внешней нагрузки.

4. Определим δ_{11}, пользуясь методом Верещагина. Умножим эпюру от действия единичной силы саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{M} \times \overline{M}\right) =$$

$$= \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_1 \overline{M}_1 + \Omega_2 \overline{M}_2\right) = \frac{a^3}{EJ_X}$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2} a\, a, \qquad \overline{M}_1 = -\frac{2}{3} a$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2} a\, 2a, \qquad \overline{M}_2 = -\frac{2}{3} a$$

5. Определим Δ_{1P}, пользуясь методом Верещагина.

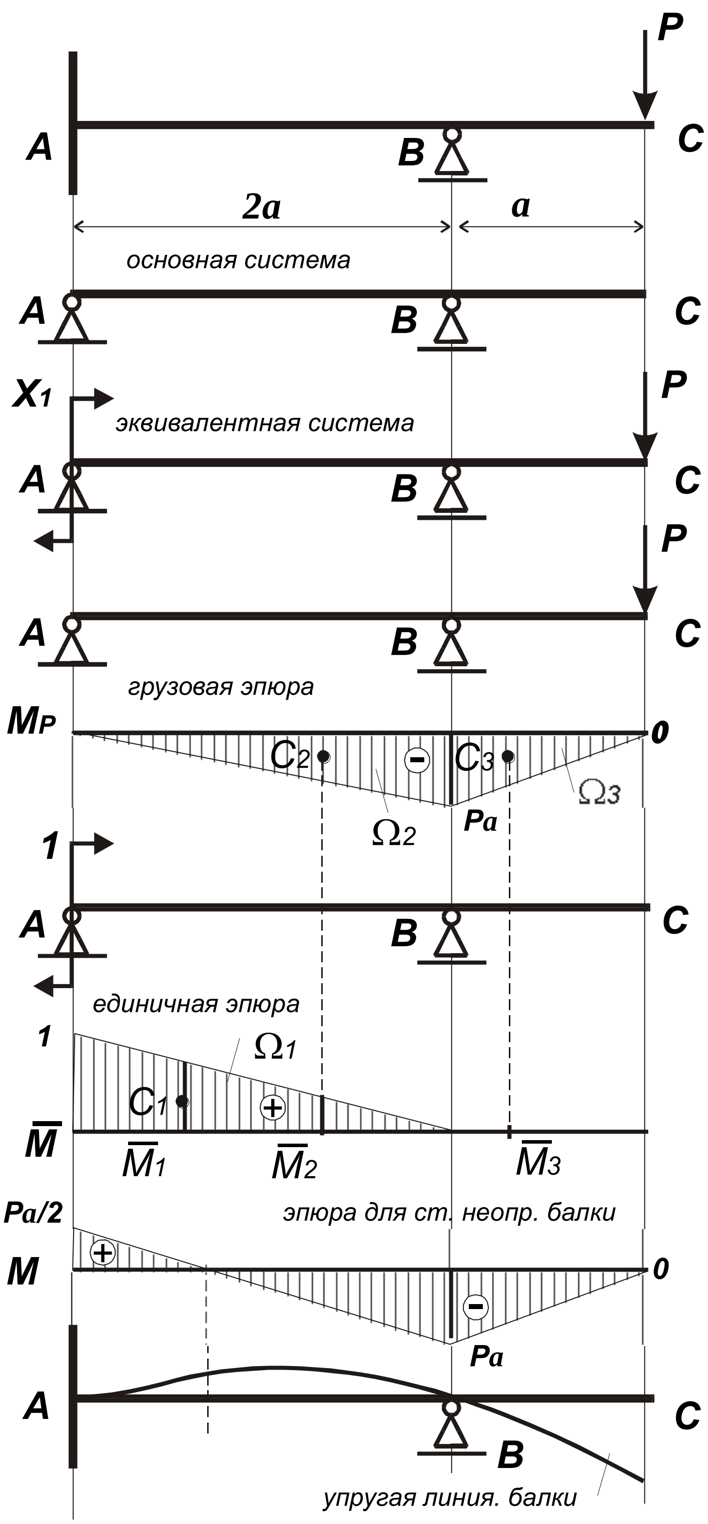
$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_X}\left(M_P \times \overline{M}\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_3 \overline{M}_3\right) = -\frac{Ma^2}{3EJ_X}$$

$$\Omega_3 = +\frac{1}{2} M\, 2a, \qquad \overline{M}_3 = -\frac{1}{3} a$$

6. Определим X_1: $\qquad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = +\frac{M}{3a}$

7. Строим эпюру изгибающего момента для эквивалентной балки.

8. Для проверки правильности решения строим приближенную форму упругой линии статически неопределимой балки. Упругая линия должна пройти через шарнир *C*.



1. Выбираем основную систему, отбрасывая лишнюю связь (жесткую заделку *A* заменяем шарниром).
2. Строим эквивалентную систему, прикладывая внешние нагрузки и неизвестную реакцию отброшенной связи X_1 *(момент в заделке)*. Условие эквивалентности – перемещение (угол поворота) по месту отброшенной связи должно быть равно нулю: $\theta_A = 0$.
3. Записываем условие эквивалентности в виде канонического уравнения метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad .$$

δ_{11} - угол поворота в сечении *A*, вызванный единичным моментом, приложенным в сечении *A* в направлении X_1 .

Δ_{1P} - угол поворота в сечении *A* от действия внешней нагрузки.

4. Определим δ_{11}, пользуясь методом Верещагина. Умножим эпюру от действия единичной силы саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_X}\left(\overline{M} \times \overline{M}\right) = \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_1 \overline{M}_1\right) = +\frac{2a}{3EJ_X}$$

$$\Omega_1 = +\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a, \qquad \overline{M}_1 = +\frac{2}{3}$$

5. Определим Δ_{1P}, пользуясь методом Верещагина.

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_X}\left(M_P \times \overline{M}\right) =$$

$$= \frac{1}{EJ_X}\left(\Omega_2 \overline{M}_2 + \Omega_3 \overline{M}_3\right) = -\frac{Pa^2}{3EJ_X}$$

$$\Omega_2 = -\frac{1}{2} Pa\ 2a, \qquad \overline{M}_2 = +\frac{1}{3}$$

$$\Omega_3 = -\frac{1}{2} Pa\ a, \qquad \overline{M}_3 = 0$$

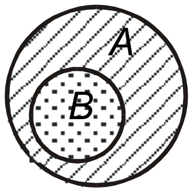
6. Определим X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = +\frac{Pa}{2}$$

7. Строим эпюру изгибающего момента для эквивалентной балки.
8. Для проверки правильности решения строим приближенную форму упругой линии статически неопределимой балки. Упругая линия должна пройти через шарнир *B*.

Расчеты на выносливость *(расчеты на прочность при переменных напряжениях)*

Усталость металлов: детали, длительное время подвергавшиеся переменным нагрузкам, могут разрушиться внезапно при напряжениях значительно меньших предела прочности. Характер разрушения при этом напоминает разрушение хрупкого материала.



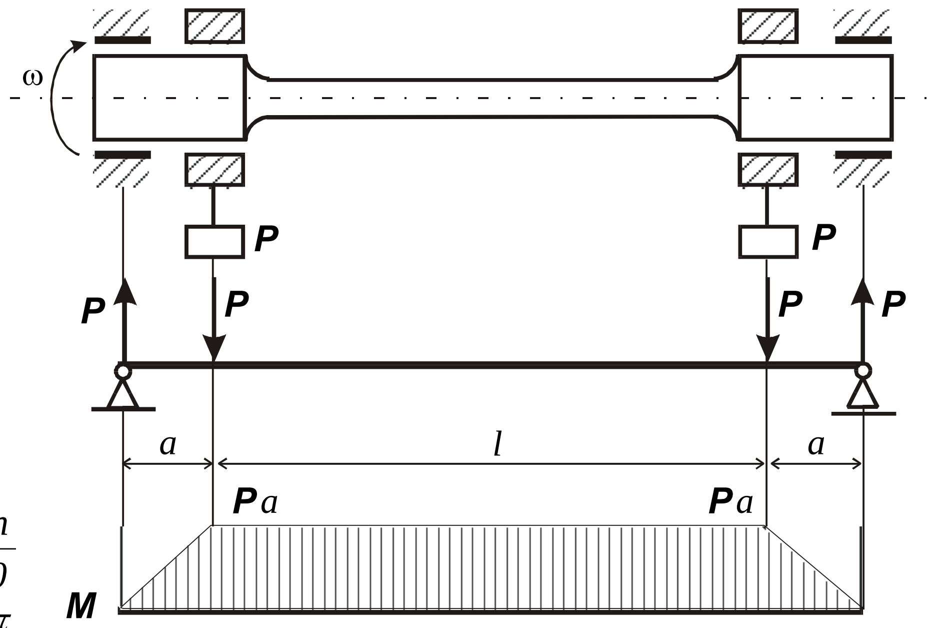
Сечение имеет две зоны:
A – гладкая притертая,
B – крупнозернистая, по виду напоминающая хрупкое разрушение.

Такой характер разрушения – следствие роста в материале микротрещин, которые сливаются в макротрещину – трещину усталости. Края трещины трутся друг о друга и сглаживают поверхность соприкосновения. Когда трещина достигнет такой величины, что сечение заметно ослабнет, произойдет внезапный излом. Хрупкий характер излома не за счет изменения механических свойств металла, а за счет сложного (объемного) напряженного состояния в зоне разрушения.

Выносливость материала (детали) – способность сопротивляться действию многократных переменных нагрузок.

Испытания на усталость.

Цель испытаний - экспериментально определить характеристики сопротивления усталости. Характер нагружения – изгиб с вращением образца (частота вращения n=2000÷3000 об/мин).

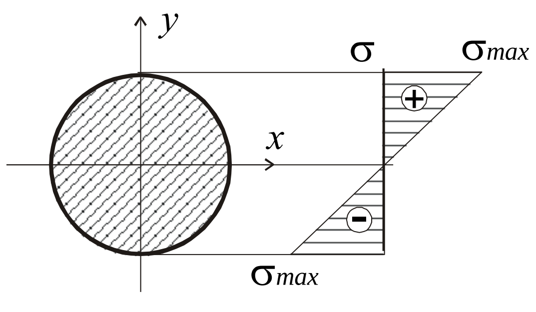


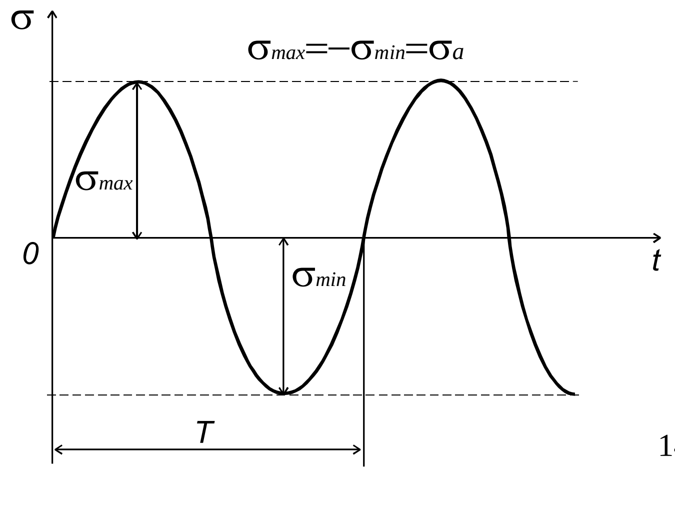
При такой схеме нагружения образца в точках на его поверхности получаем симметричный цикл напряжений. Амплитуда цикла:

$$\sigma_a = \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{Pa}{0{,}1d^3}$$

ω – угловая скорость, $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$

T – период колебаний, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$



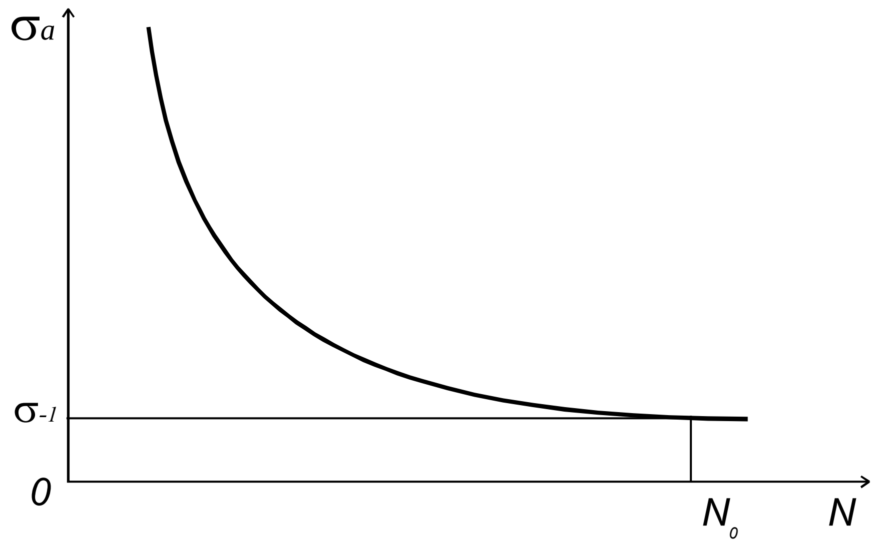


Нагрузку P создают такую, чтобы для первого образца амплитуда напряжений σ_a была несколько ниже $\sigma_в$. Образец нагружают до разрушения, t_p – время испытания до разрушения, число циклов нагружения, которое выдержал образец до разрушения

$$N_p = \frac{t_p}{T} = \frac{t_p \cdot \omega}{2\pi}.$$

На следующие образцы нагрузки снижают. Испытания заканчиваются, если образец не разрушится при числе циклов, называемом базой испытаний $N_0=10^7$ циклов.

По результатам испытаний строится <u>кривая усталости (кривая выносливости)</u>



<u>Предел выносливости</u> σ_{-1} – амплитуда симметричного цикла, при которой не происходит усталостного разрушения образца неограниченное число циклов нагружения. Кривая усталости строится для эталонных образцов с полированной поверхностью и диаметром $d=10$ *мм*, т.е. σ_{-1} – предел выносливости эталонного образца.

<u>Факторы, снижающие предел выносливости</u>:
Размеры детали (увеличение диаметра снижает предел выносливости), состояние поверхности детали (шероховатость поверхности), наличие концентраторов напряжений, агрессивная среда, наличие сварных швов.

<u>Предел выносливости детали</u>:

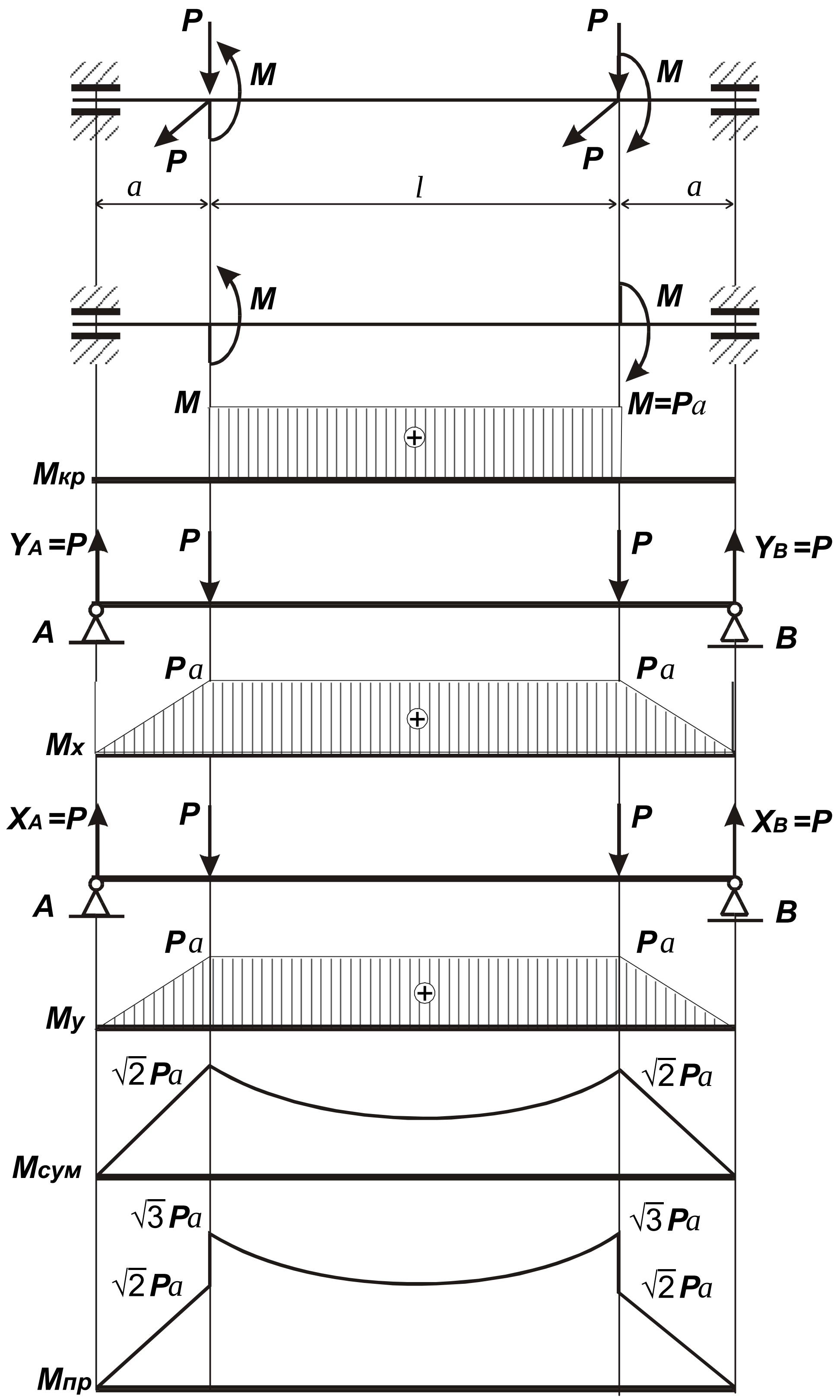
$$\boxed{\sigma_{-1Д} = \frac{\sigma_{-1}}{K}}$$

<u>*K* – коэффициент снижения предела выносливости</u>, вычисляется с помощью таблиц коэффициентов, приведенных в справочнике.

В ходе расчета на выносливость определяется <u>коэффициент запаса усталостной прочности *n*</u>, показывающий во сколько раз предел выносливости детали больше максимальных рабочих напряжений $\sigma_{max} = \sigma_a$: $\boxed{n = \frac{\sigma_{-1Д}}{\sigma_a}}$.

При $\boxed{n=[n]=1{,}5 \div 2}$ усталостные разрушения не возникают.

Изгиб с кручением (Курсовая II раздел)



При совместном действии изгиба и кручения работают трансмиссионные валы.

1).Строим эпюру крутящих моментов $\boldsymbol{M_{кр}}$.

2).Строим эпюру изгибающих моментов $\boldsymbol{M_x}$ от действия вертикальных сил.

3).Строим эпюру изгибающих моментов $\boldsymbol{M_y}$ от действия горизонтальных сил.

4).Строим эпюру суммарного изгибающего момента $\boldsymbol{M_{сум}}$ (эпюра пространственная).

$$M_{сум} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

5).Строим эпюру приведенного момента $\boldsymbol{M_{пр}}$ (эпюра пространственная).

$$M_{пр} = \sqrt{M_{сум}^2 + M_{кр}^2}$$

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\boxed{\sigma_{пр} = \frac{M_{пр}}{W_x} \le [\sigma],}$$

$$M_{пр} = \sqrt{3}Pa, \qquad W_x = 0{,}1d^3, \;\Rightarrow\qquad d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{пр}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}Pa}{0{,}1[\sigma]}}.$$